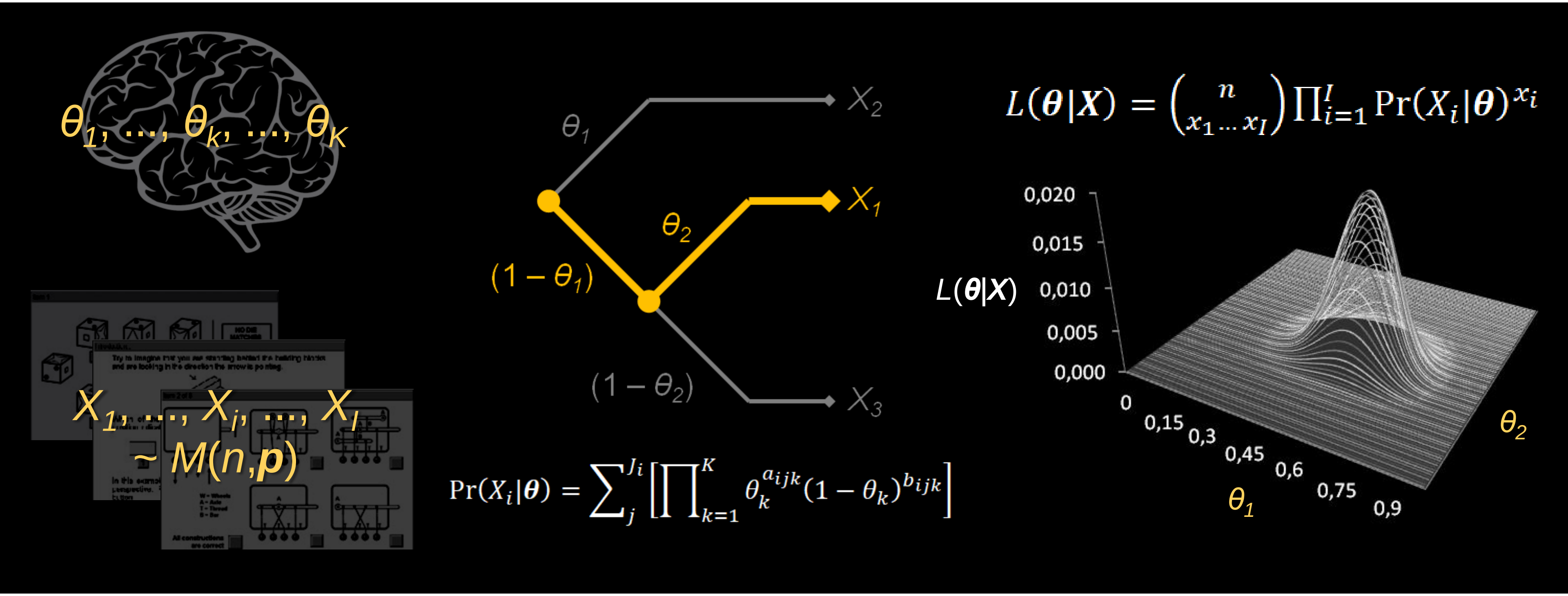
Modelagem Multinomial
na Investigação de Processos Latentes



Carlos F. A. Gomes, PhD
(carlos.fagomes@gmail.com)

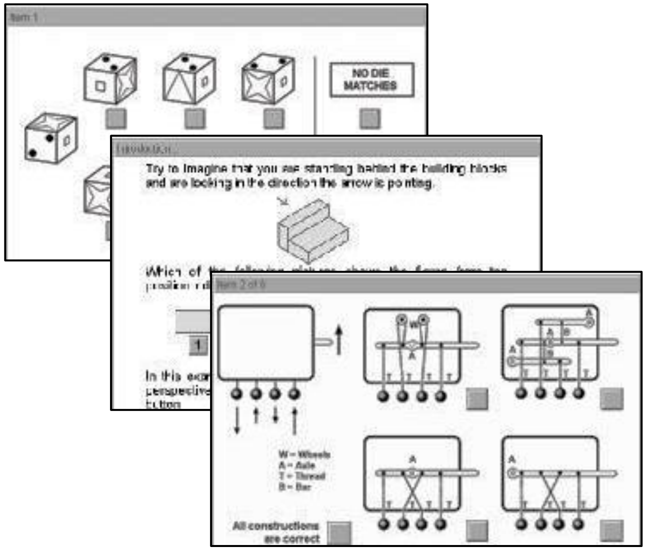
UFJF - Agosto 2019

Idéias principais

1. **O que é** modelagem multinomial?
2. **Por que** usar?
3. **Como** desenvolver?

Introdução

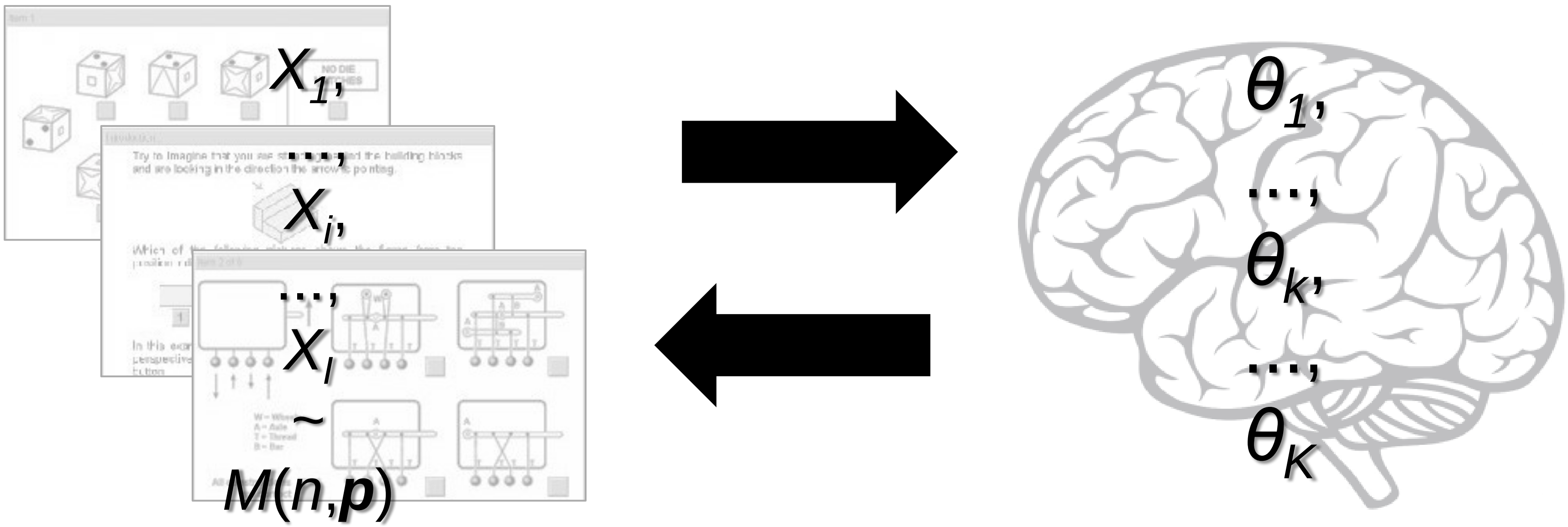
- Teorias psicológicas fazem referência a processos não observáveis (latentes)
  - E.g., tipos representações mentais



- Processos latentes controlam desempenho em uma ou múltiplas tarefas experimentais
  - E.g., acurácia, tempo de reação

O que é modelagem multinomial?

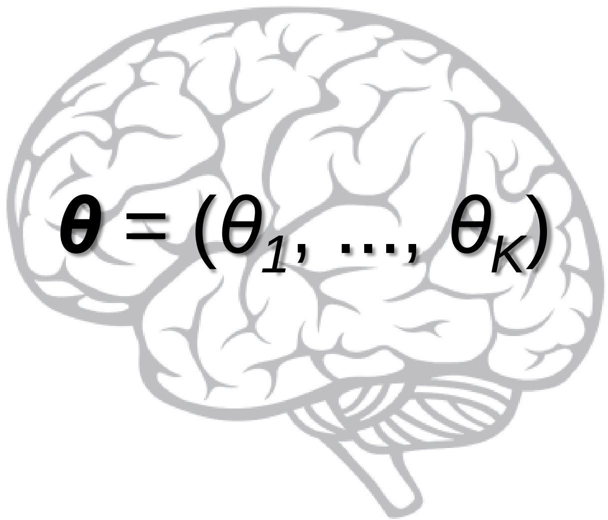
Definição



- Ferramenta analítica que permite obter **medidas quantitativas simples de processos latentes**

- Isso é feito através da modelagem de **variáveis observáveis que seguem distribuição multinomial**

Definição



$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_K)$$

- No qual o conjunto de processos latentes ($\boldsymbol{\theta}$) é **informado por uma teoria psicológica**

- Modelos são testáveis utilizando **dados reais** (mas também podem fazer simulações)

Por que usar modelagem multinomial?

Motivação

- Formalismo acessível
  - Área sem treinamento formal
- Análise de dados reflete uma teoria psicológica
  - Métodos tradicionais não foram desenvolvidos para responder perguntas da nossa área e podem levar a conclusões erradas quando VIs afetam processos latentes de forma oposta

Motivação

- Fornecem medidas quantitativas simples de processos latentes
  - Parâmetros estimados são probabilidades

- Testes de invariância de parâmetros e ajuste de modelo já bem desenvolvidos
  - Modelos com ao menos 1 *df* podem ser testados empiricamente e comparados
  - Pacotes de R disponíveis p/ qualquer um utilizar gratuitamente

Motivação

- Tecnologia com mais de 30 anos de refinamento e em contínuo aprimoramento
  - **Medidas de complexidade** p/ seleção de modelos multinomiais (Wu, Myung, & Batchelder, 2010)
  - Métodos de **análise Bayesiana** (Matzke, Dolan, Batchelder & Wagenmakers, 2015)
  - Modelos multinomiais dentro de **modelos multiníveis**/hierárquicos/misto (Klauer, 2010; Smith & Batchelder, 2010)
  - **Análise temporal** de processos latentes (Heck & Erdelder, 2016)

Motivação

- William H. Batchelder (1940-Ago/2018)
  - https://www.socsci.uci.edu/newsevents/news/2018/2018-08-20-batchelder.php

Motivação

- Comunidade científica diversa e em crescimento
  - Batchelder & Riefer (1999): Revisão de 30 modelos multinomiais na área de cognição humana
  - Erdfelder et al. (2009): Revisão de 70 modelos multinomiais em mais de 20 áreas de pesquisa psicológica

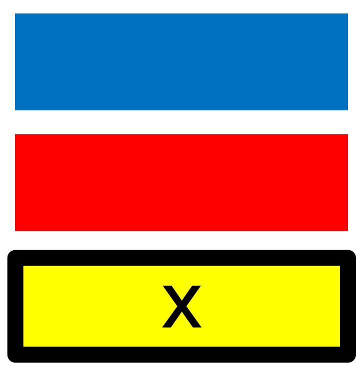





Como desenvolver um modelo multinomial?

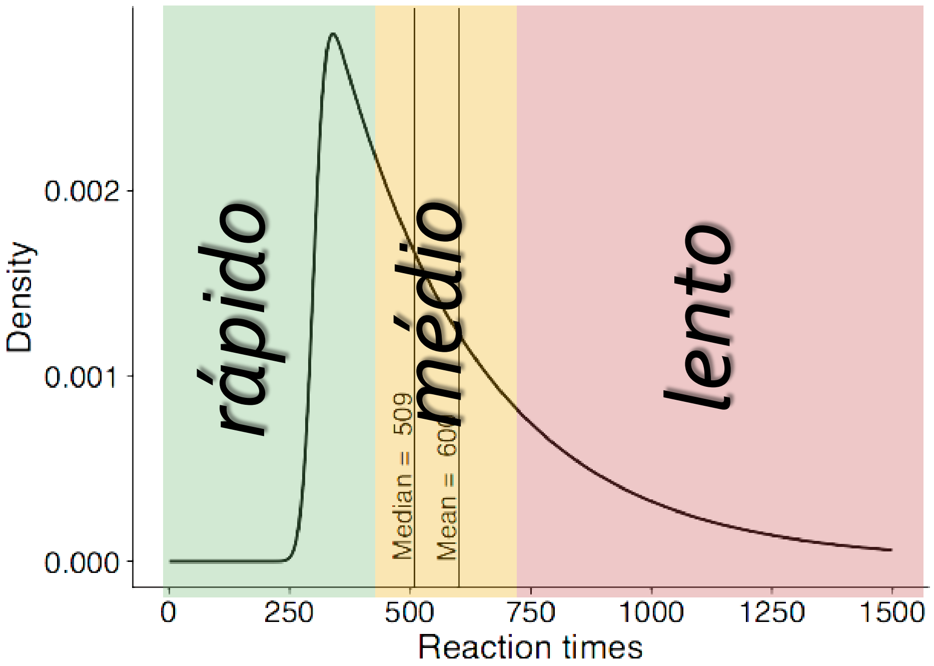
Representação dos dados

- Os dados possuem **três** propriedades:
  1. Natureza categorial / discreta
  2. Número finito de condições mutuamente excludentes



Representação dos dados

- Os dados possuem **três** propriedades:
  1. Natureza ~~categorial / discreta~~ ou *"discretizada"*



Análise qualitativa

$X_1, X_2, \ldots, X_I$

Representação dos dados

- Os dados possuem **três** propriedades:
  3. Observações são independentes e distribuídas de forma idêntica (*iid*.)

p(“cara”)=.5

p(“cara”)=.5

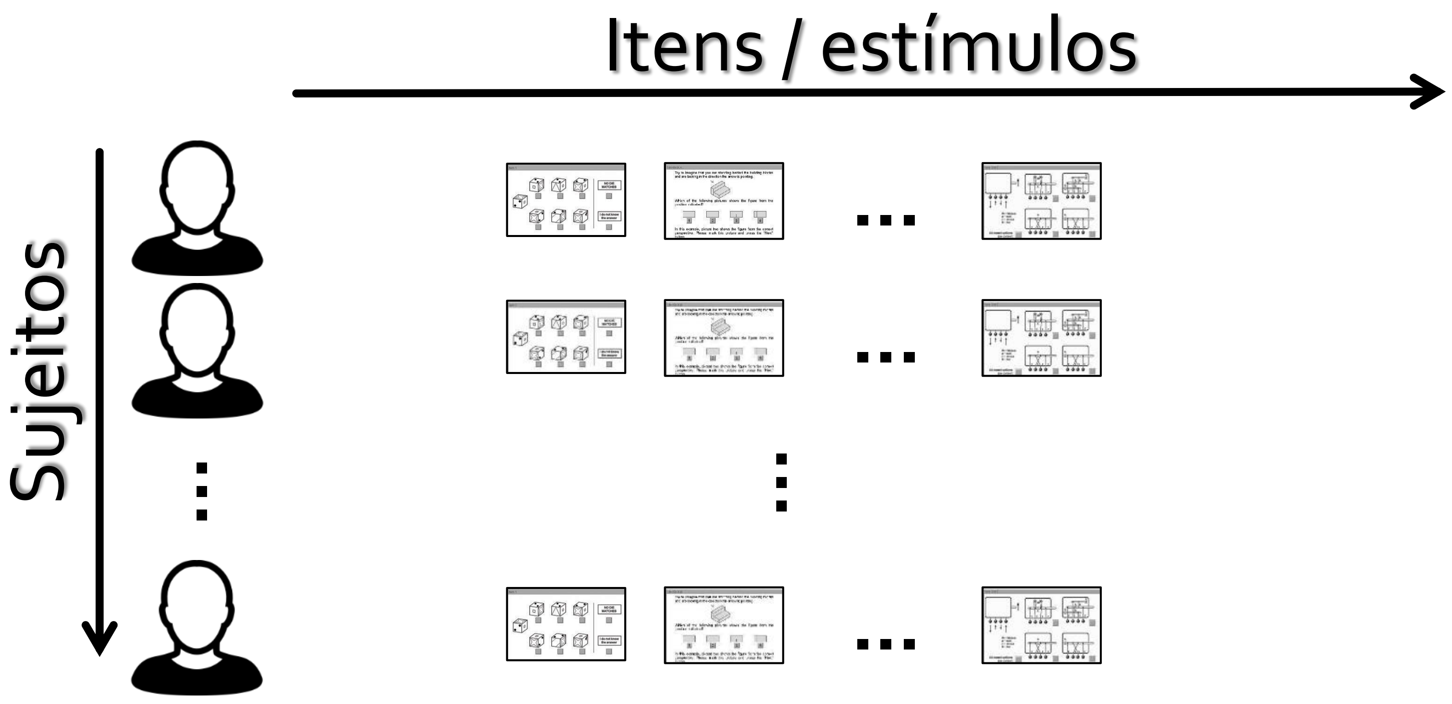
p(“cara”)=.5

p(“cara”)=.5

Trial 1 Trial 2 Trial 3 Trial 4

Representação dos dados

- Os dados possuem **três** propriedades:
  3. Observações são independentes e distribuídas de forma idêntica (*iid*.)

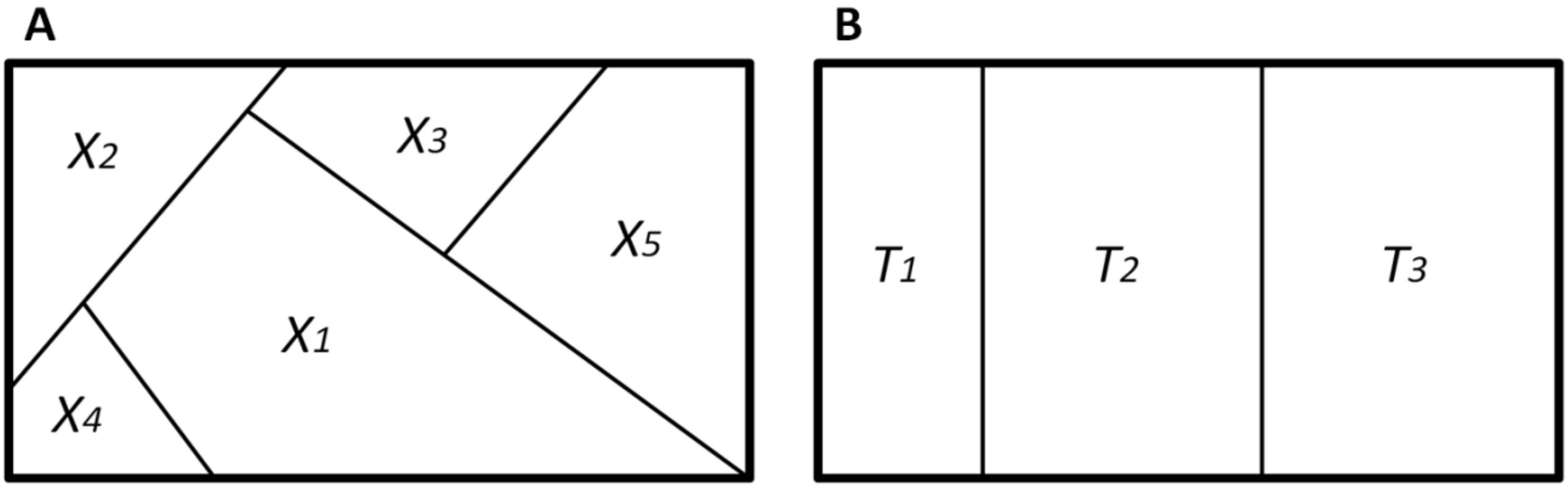


Estados mentais

- Na aplicação à psicologia, uma das idéias centrais é a de estados mentais:
  - Para um conjunto $X_1, \ldots, X_I$, existe um conjunto $T_1, \ldots, T_J$ de estados mentais que geram X_i

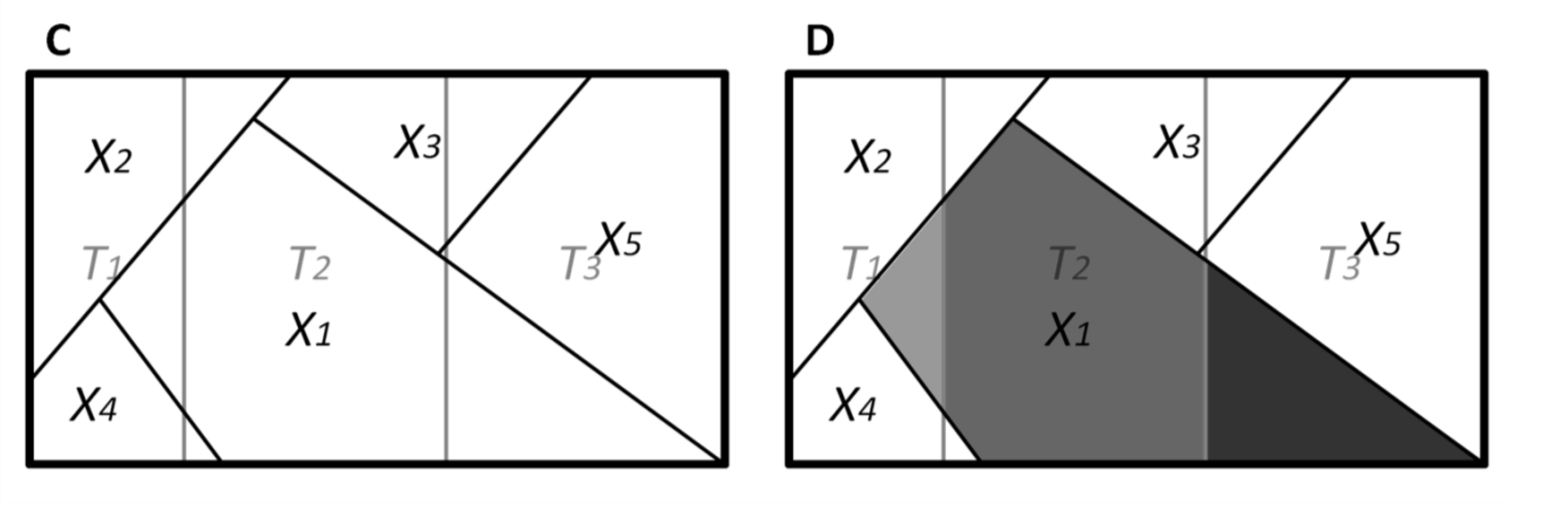
Estados mentais

- Na aplicação à psicologia, uma das idéias centrais é a de estados mentais:
  - Para um conjunto $X_1, \ldots, X_I$, existe um conjunto $T_1, \ldots, T_J$ de estados mentais que geram X_i



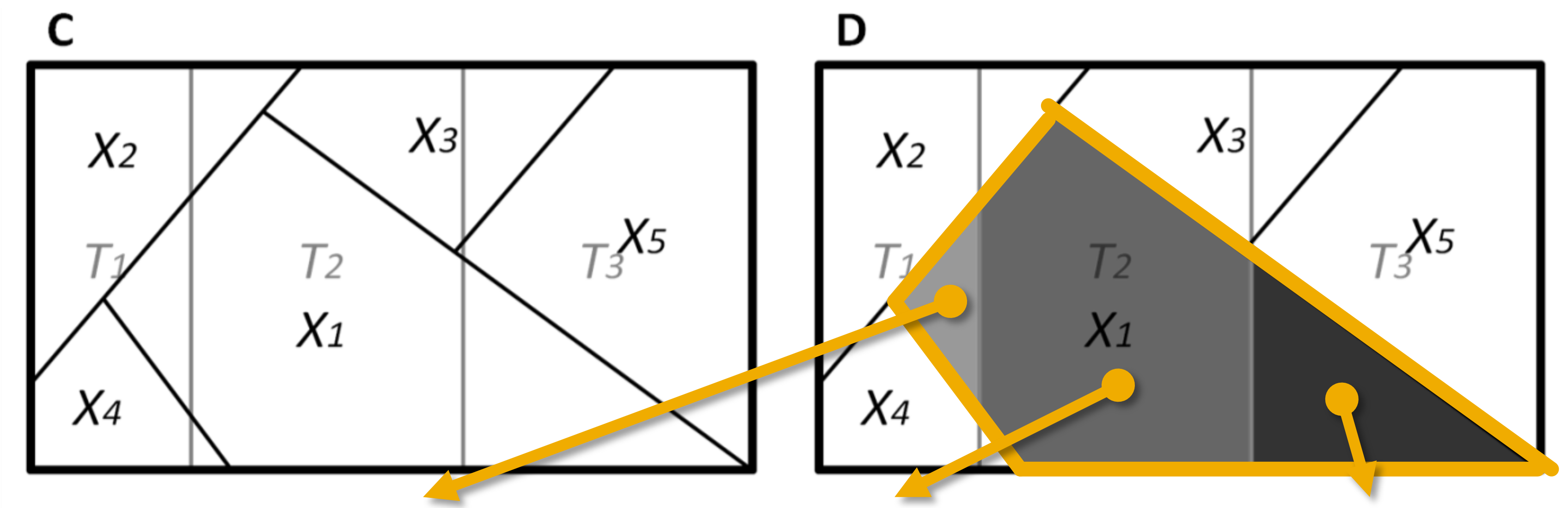
Estados mentais

- Na aplicação à psicologia, uma das idéias centrais é a de estados mentais:
  - Para um conjunto $X_1, \ldots, X_I$, existe um conjunto $T_1, \ldots, T_J$ de estados mentais que geram X_i



Estados mentais

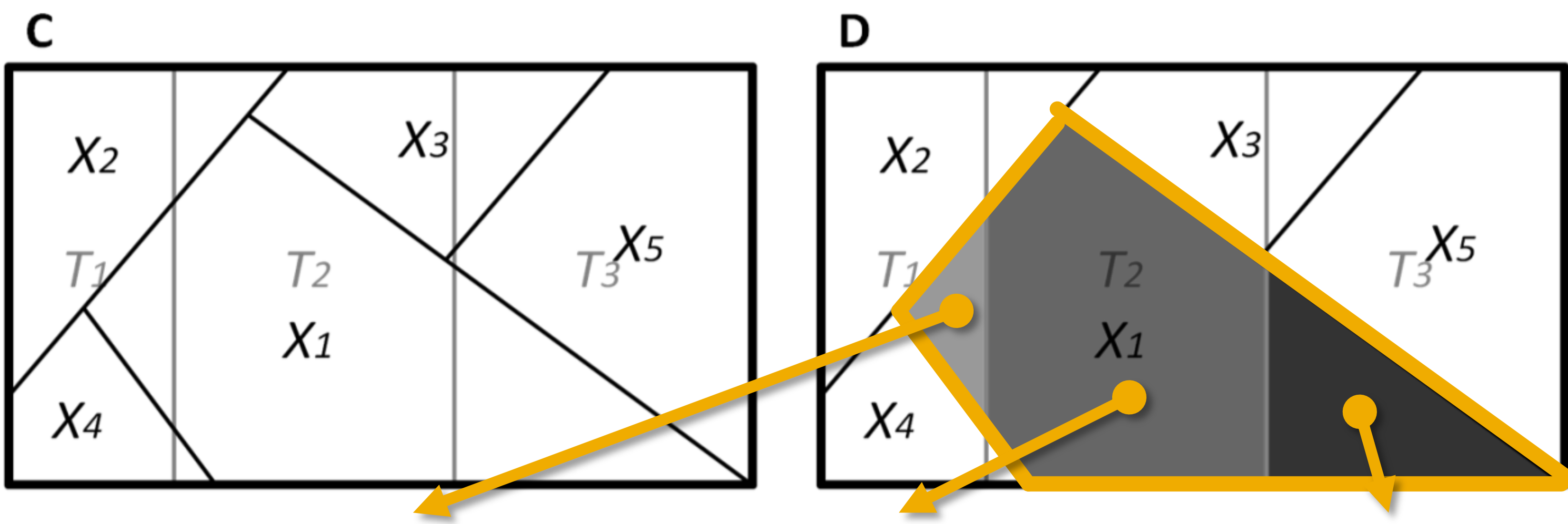
$$\Pr(X_i) = \sum_{j=1}^{J} \Pr(X_i \cap T_j) \Leftrightarrow \Pr(X_i) = \sum_{j=1}^{J} \Pr(X_i|T_j)\Pr(T_j)$$



$$\Pr(X_1) = \Pr(X_1|T_1)\Pr(T_1) + \Pr(X_1|T_2)\Pr(T_2) + \Pr(X_1|T_3)\Pr(T_3)$$

Estados mentais

$$\Pr(X_i) = \sum_{j=1}^{J} \Pr(X_i \cap T_j) \Leftrightarrow \Pr(X_i) = \sum_{j=1}^{J} \Pr(X_i | T_j)\Pr(T_j)$$



$$\Pr(X_1) = \overbrace{\Pr(X_1|T_1)\Pr(T_1)} + \overbrace{\Pr(X_1|T_2)\Pr(T_2)} + \overbrace{\Pr(X_1|T_3)\Pr(T_3)}$$

Valores conhecidos

Valores desconhecidos

Estados mentais

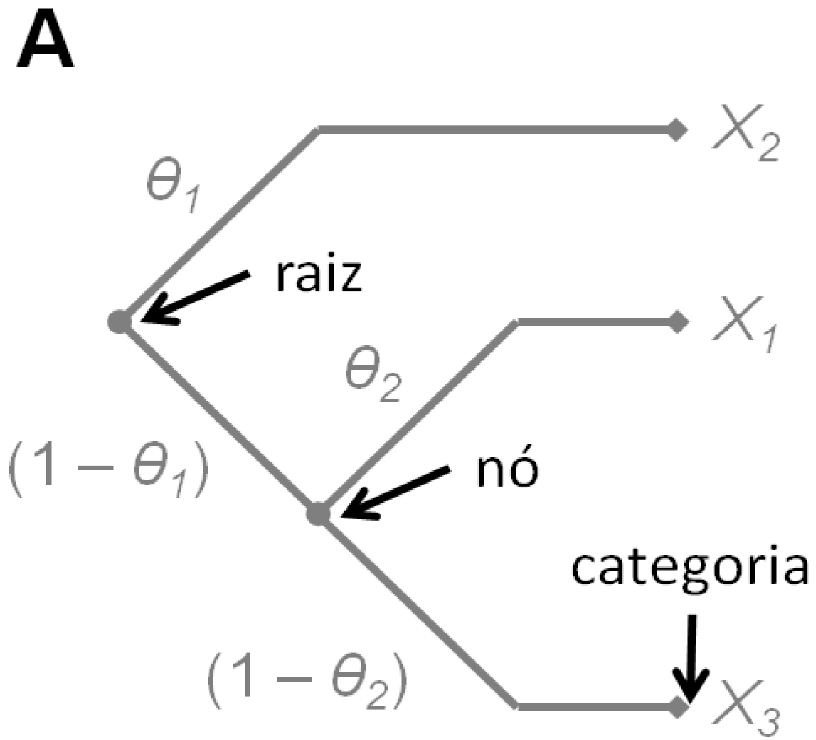
- Em modelagem multinomial, isto é feito através do pressuposto de que $\Pr(X_i|T_j)$ e $\Pr(T_j)$ são definidos por um conjunto de parâmetros de processos latentes $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_K)$.

- Isto é feito de forma que $K \leq df$.

- O mapeamento entre $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_K)$ e $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_I)$ é facilitado através do uso de **diagramas em forma de árvore**.

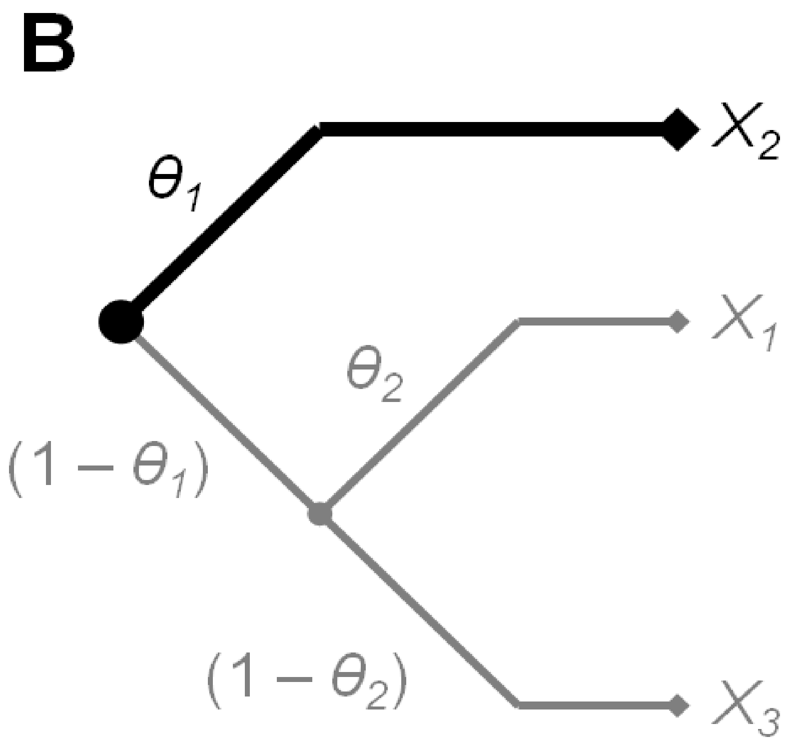
Diagramas em forma de árvore

- É um dígrafo (Bondy & Murty, 2008)



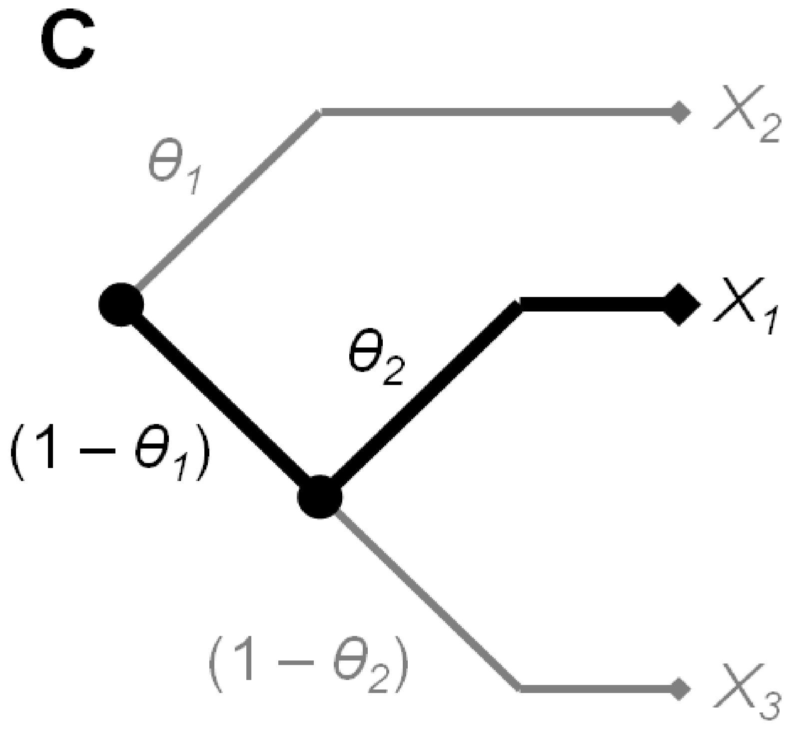
Diagramas em forma de árvore

- É um dígrafo (Bondy & Murty, 2008)



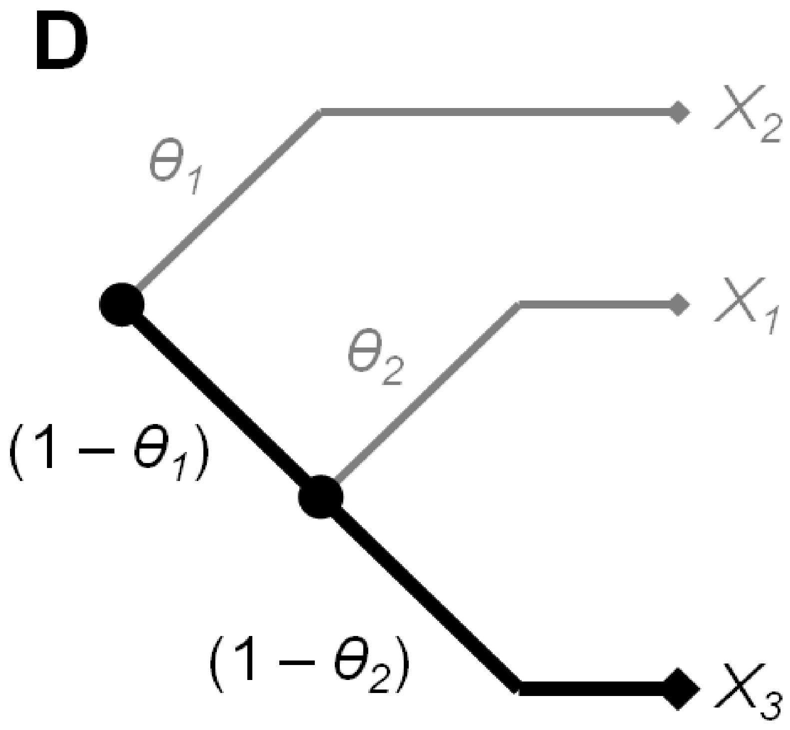
Diagramas em forma de árvore

- É um dígrafo (Bondy & Murty, 2008)



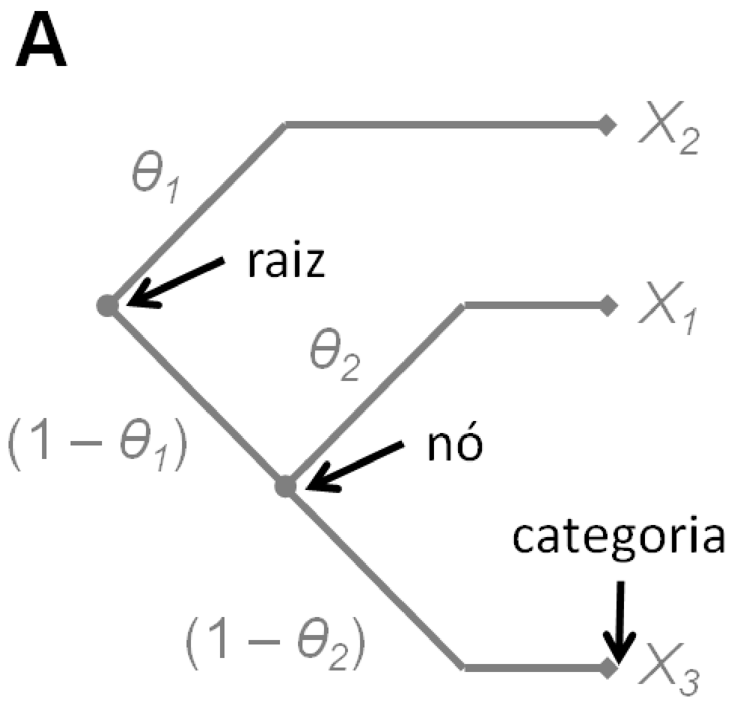
Diagramas em forma de árvore

- É um dígrafo (Bondy & Murty, 2008)



Diagramas em forma de árvore

- São chamadas de *binary multinomial processing tree* (BMPT)



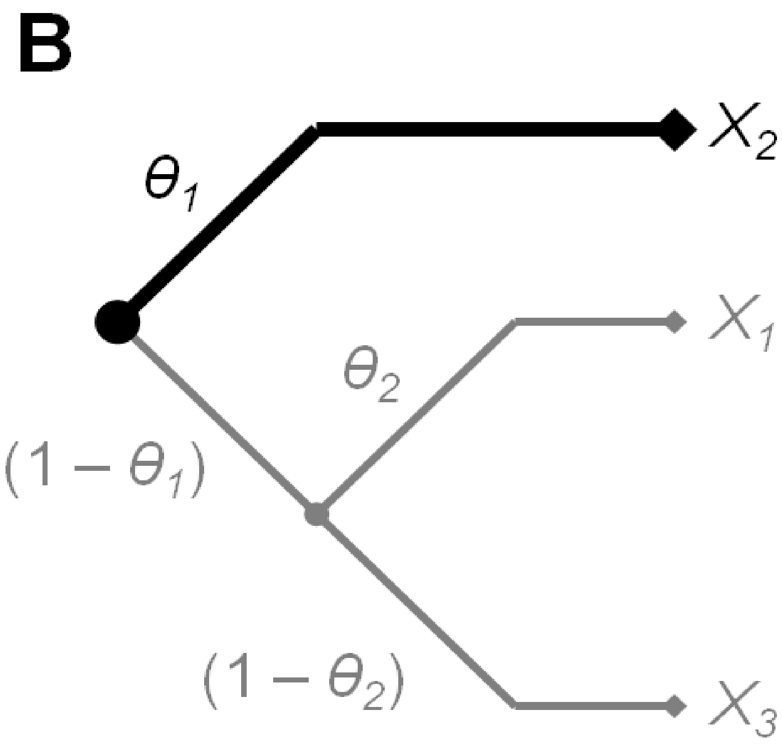
- Probabilidade de cada galho é o produto dos processos ao longo do mesmo

$$\Pr(G_{ij}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{K} \theta_k^{a_{ijk}} (1-\theta_k)^{b_{ijk}}$$

$a_{ijk}, b_{ijk} \geq 0$

Diagramas em forma de árvore

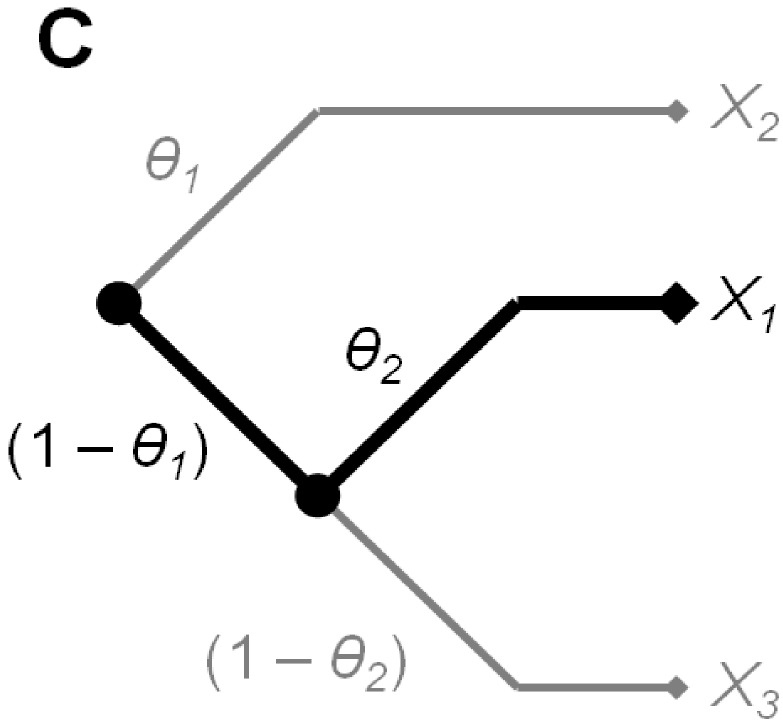
$$\Pr(G_{ij}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{K} \theta_k^{a_{ijk}} (1-\theta_k)^{b_{ijk}}$$



$$\Pr(G_{21}|\boldsymbol{\theta}) = \theta_1$$

Diagramas em forma de árvore

$$\Pr\left(G_{ij}|\boldsymbol{\theta}\right) = \prod_{k=1}^{K} \theta_k^{a_{ijk}} (1-\theta_k)^{b_{ijk}}$$

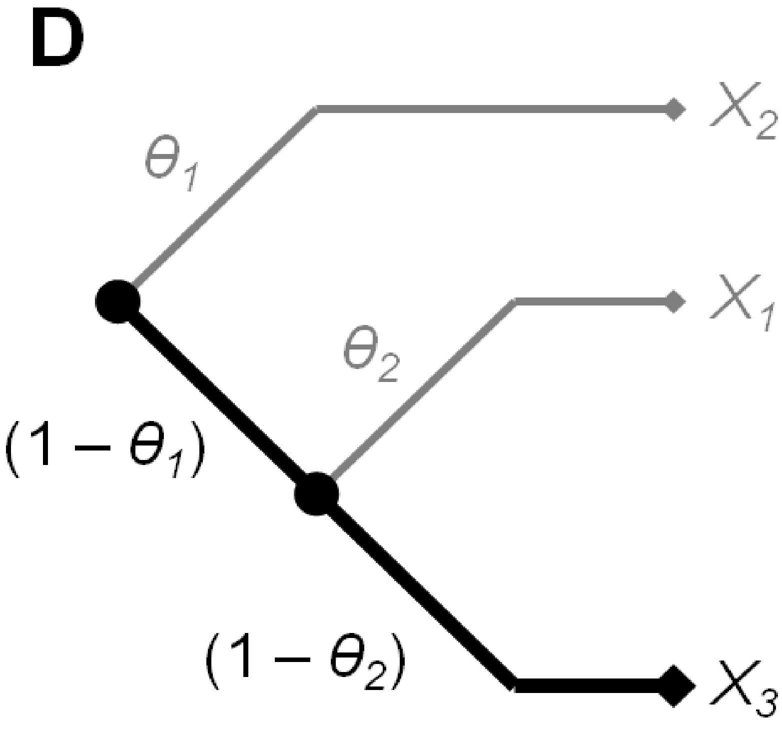


$$\Pr(G_{21}|\boldsymbol{\theta}) = \theta_1$$

$$\Pr(G_{11}|\boldsymbol{\theta}) = (1\text{-}\theta_1)\theta_2$$

Diagramas em forma de árvore

$$\Pr(G_{ij}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{k=1}^{K} \theta_k^{a_{ijk}} (1-\theta_k)^{b_{ijk}}$$



$\Pr(G_{21}|\boldsymbol{\theta}) = \theta_1$

$\Pr(G_{11}|\boldsymbol{\theta}) = (1\text{-}\theta_1)\theta_2$

$\Pr(G_{31}|\boldsymbol{\theta}) = (1\text{-}\theta_1)(1\text{-}\theta_2)$

Diagramas em forma de árvore

- Como diagramas descrevem o espaço de resposta por completo, as **probabilidades de cada categoria** (de acordo com um modelo multinomial) são definidas pela soma dos galhos que terminam nelas:

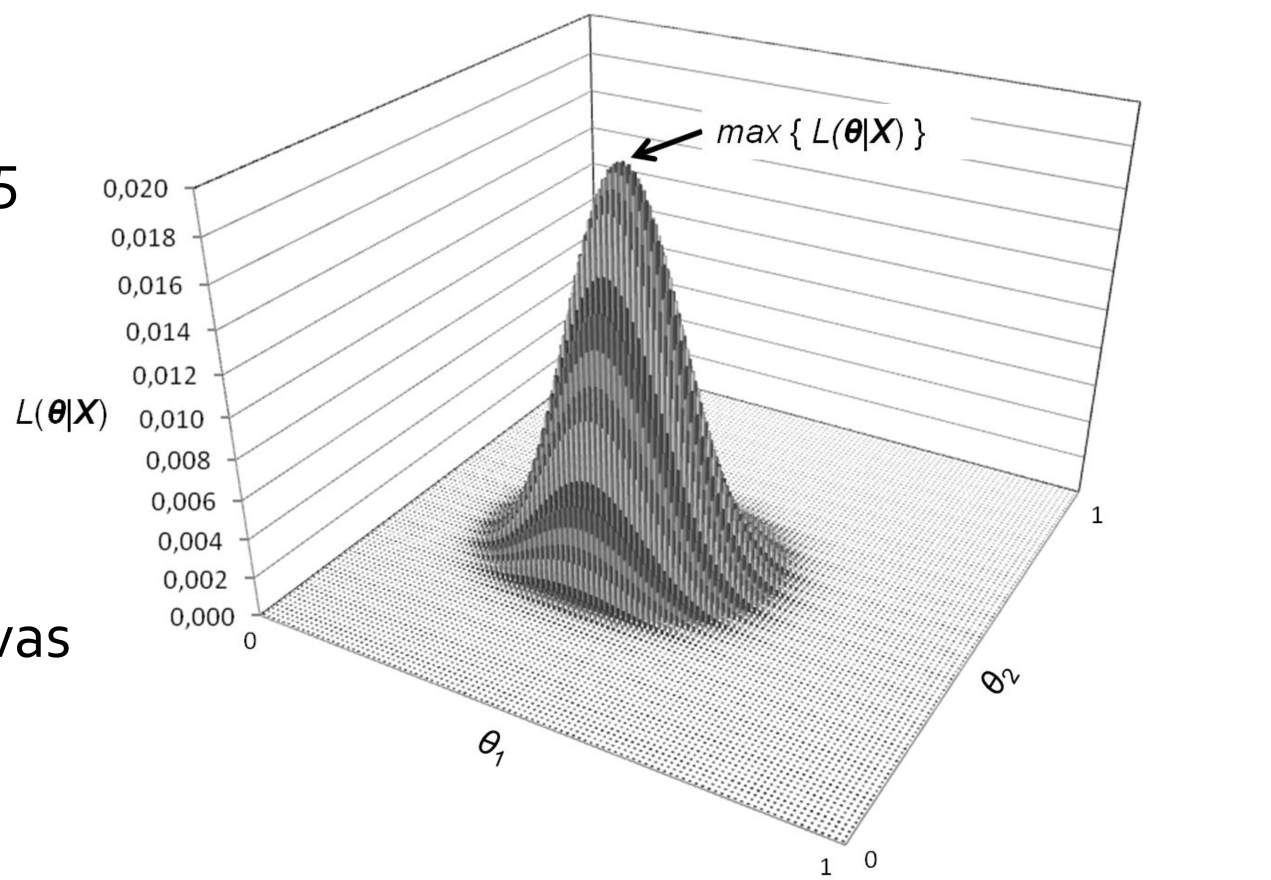
$$\Pr(X_i|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j}^{J_i} \Pr\left(G_{ij}|\boldsymbol{\theta}\right)$$

- É possível estimar parâmetros de processos latentes via métodos tradicionais

Diagramas em forma de árvore

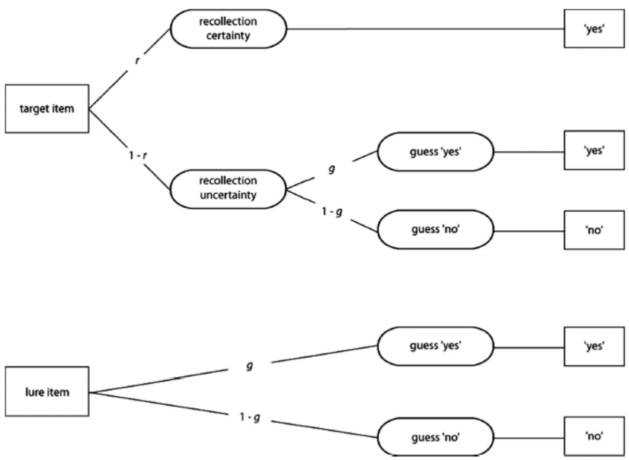
- Maximização da função de probabilidade:

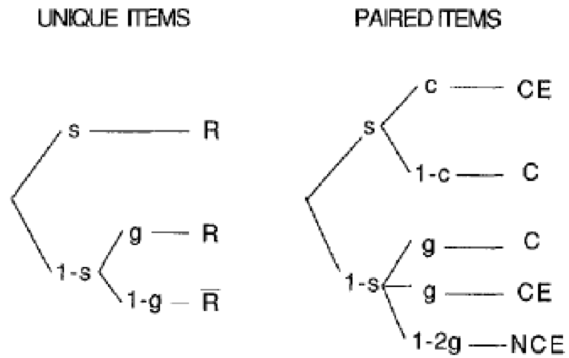
Exemplo p/
$x_1 = 10$, $x_2 = 20$ e $x_3 = 15$
do modelo anterior.

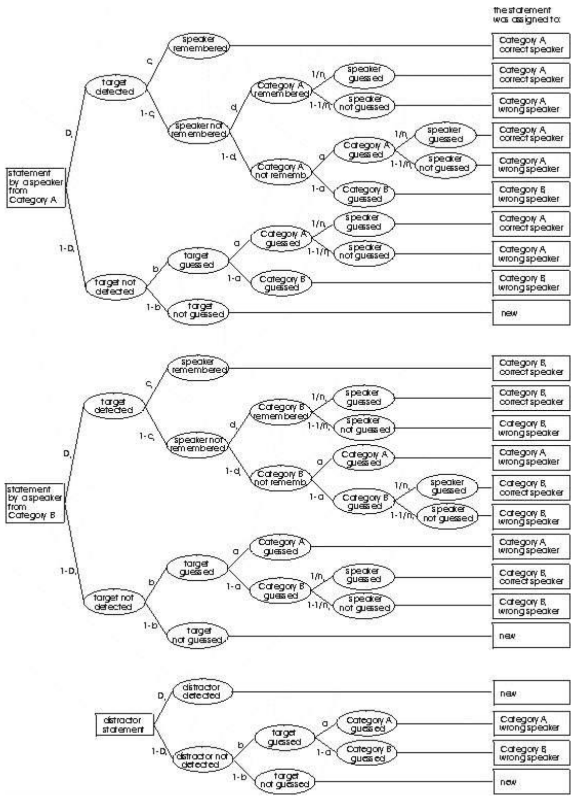


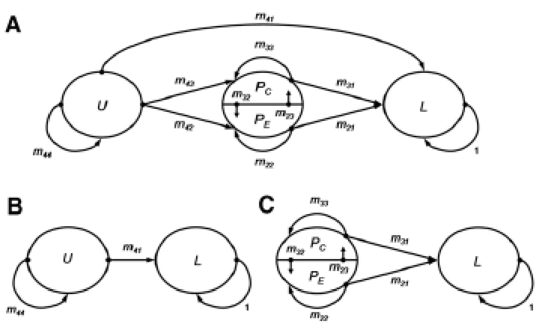
$\max\{L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{X})\} = .019$;
associado às estimativas de processos latentes θ_1=.45 e θ_2=.40

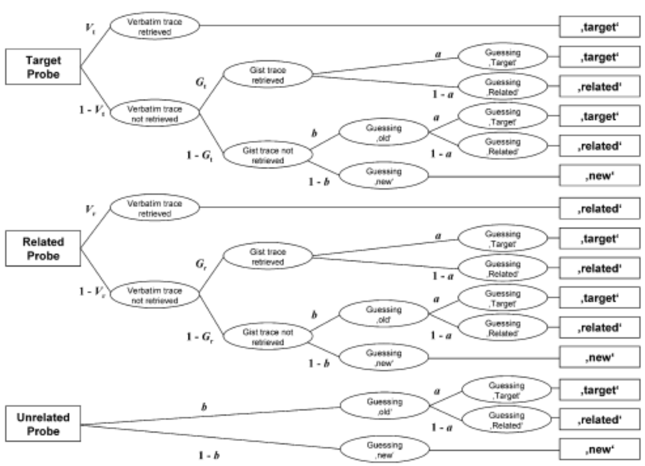
Diagramas em forma de árvore





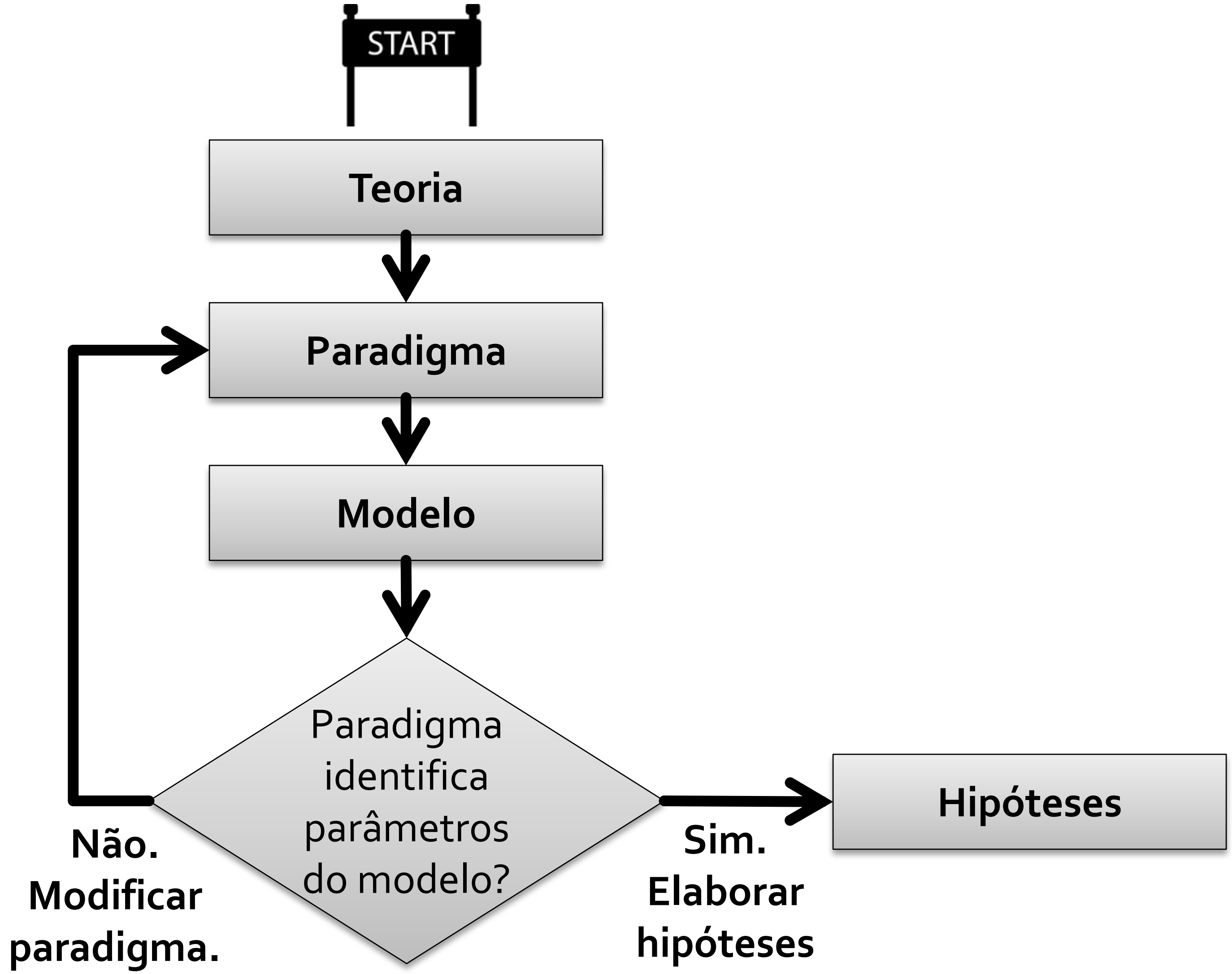




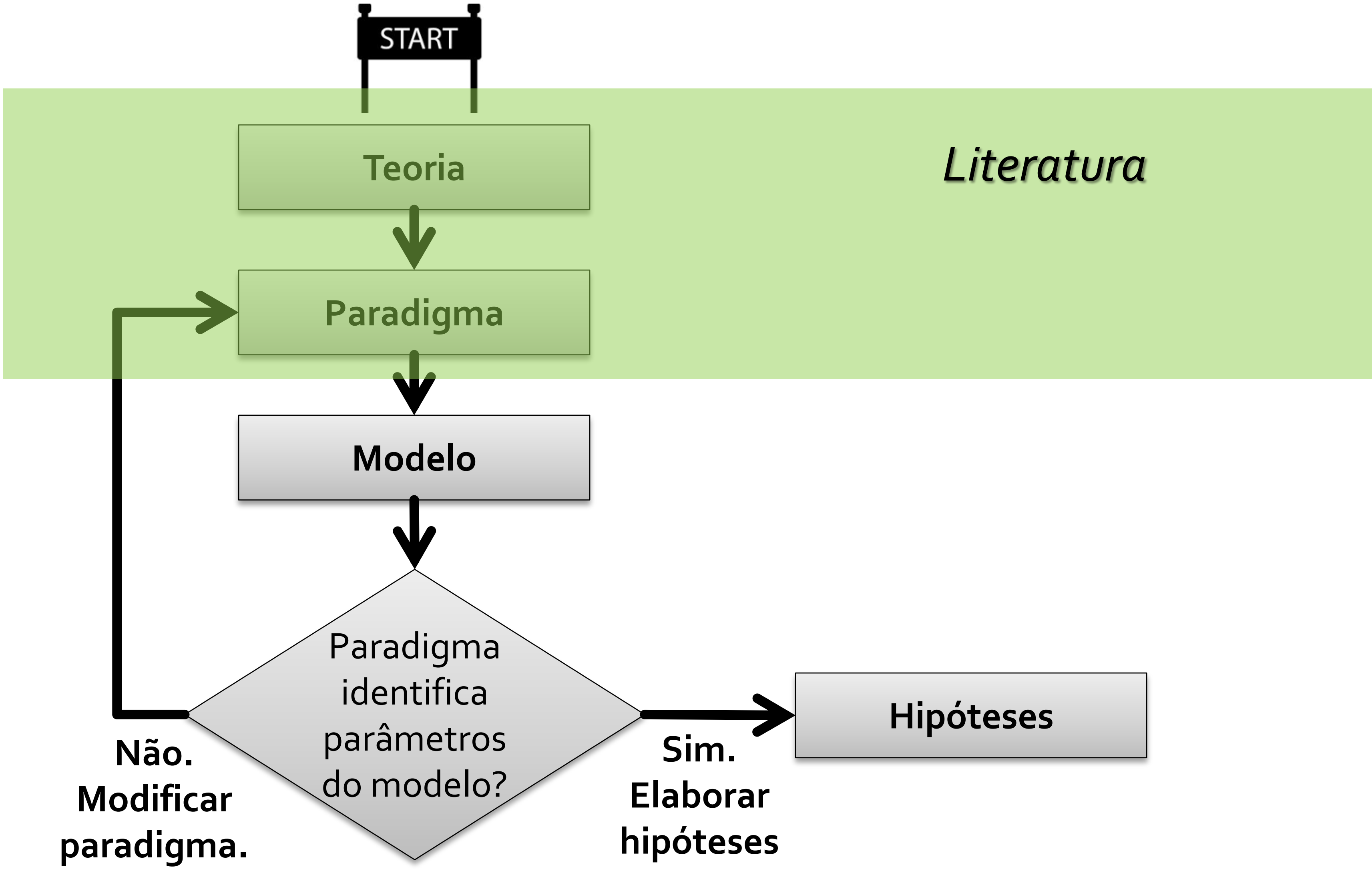


Fluxograma do processo usual de pesquisa com modelos multinomiais

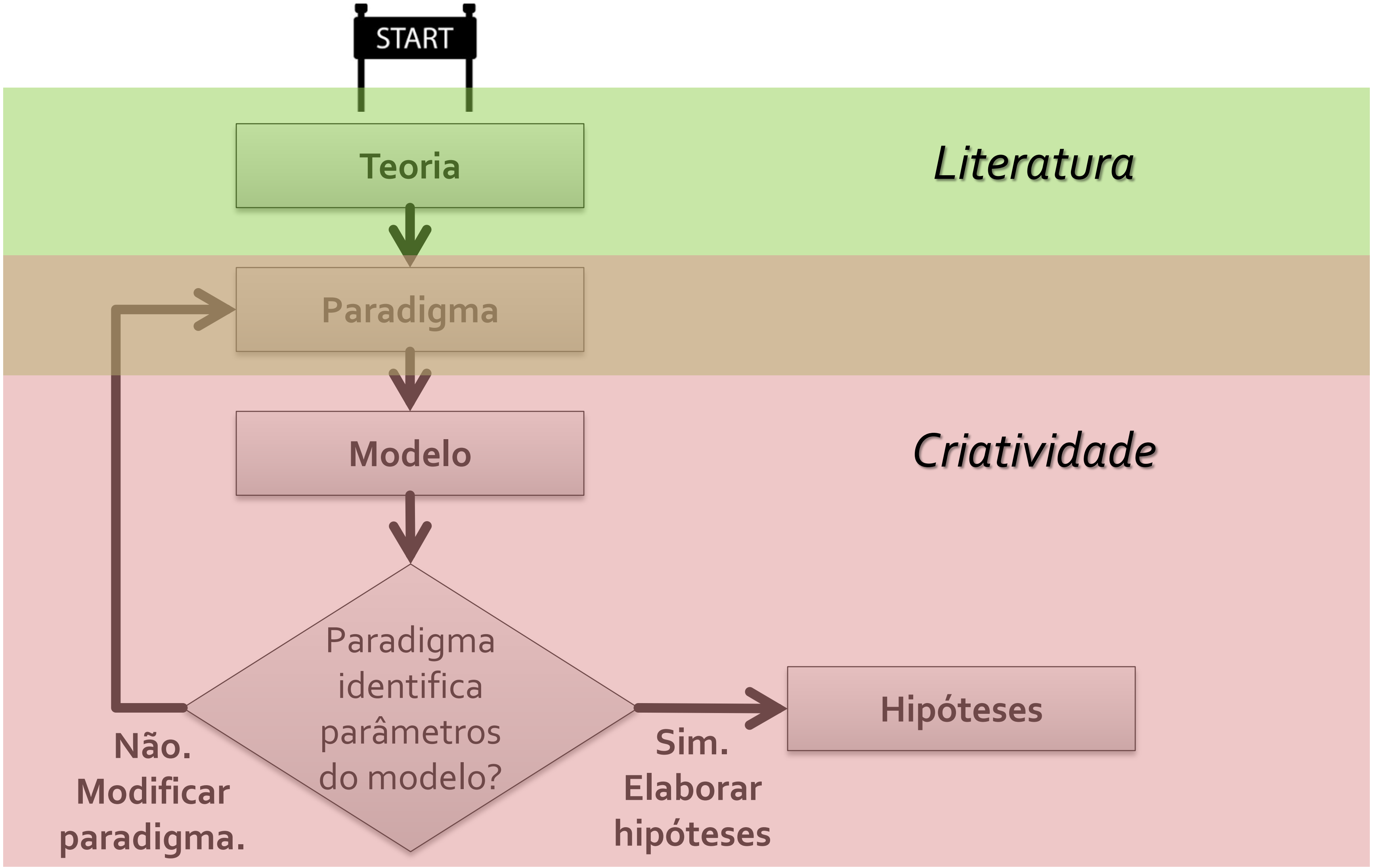
Fluxograma de pesquisa



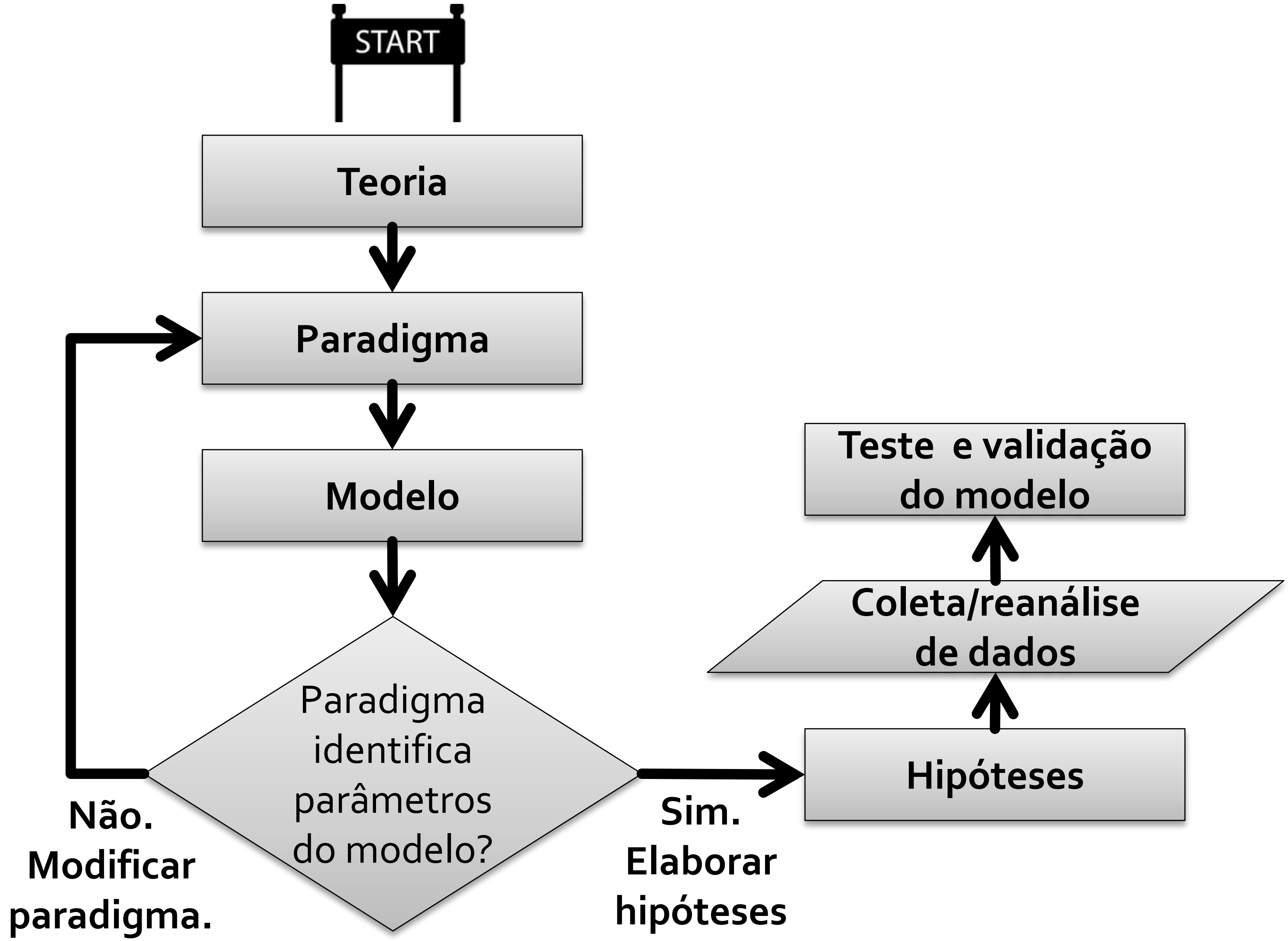
Fluxograma de pesquisa



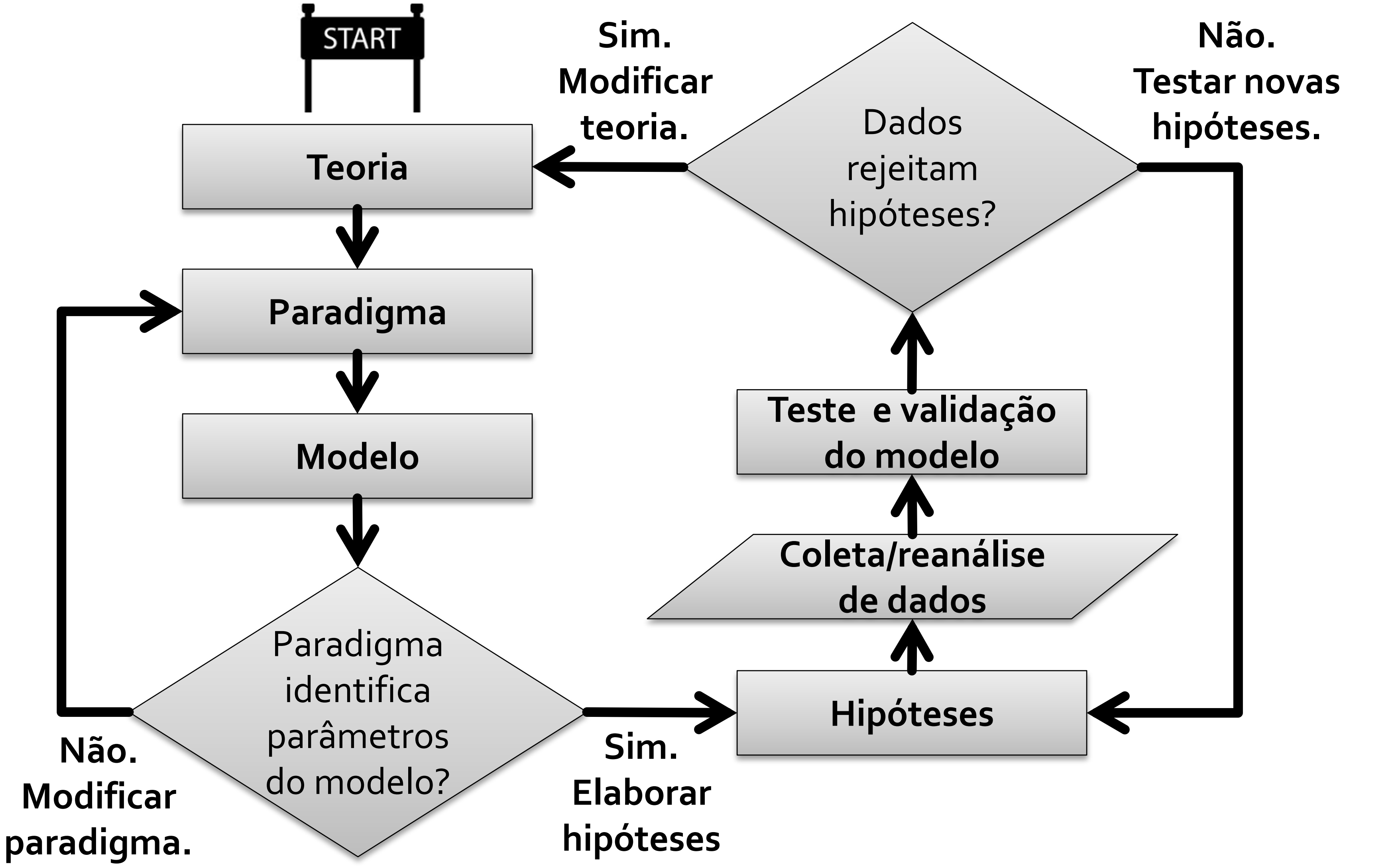
Fluxograma de pesquisa



Fluxograma de pesquisa



Fluxograma de pesquisa



Considerações finais

Considerações finais

- Leva tempo e dedicação para compreender, mas o empenho compensa!
  - Desafios de uma área sem tradição de treinamento em exatas
- Não é coincidência que em áreas de investigação científica avançadas (e.g., física de partículas, biologia molecular), modelagem matemática é sinônimo de desenvolvimento teórico.
  - Objetos de estudo também não são diretamente observáveis

Considerações finais

- Existem diversos temas sobre modelos MPT que não foram discutidos aqui!
- Quer aprender mais?
  - Google "*multinomial processing tree*"
  - Leituras sugeridas:

    - Riefer, D. M., & **Batchelder**, W. H. (**1988**). Multinomial modeling and the measurement of cognitive processes. *Psychological Review*, *95*, 318.
    - **Batchelder**, W. H., & Riefer, D. M. (**1990**). Multinomial processing models of source monitoring. *Psychological Review*, *97*, 548.
    - Stahl, C., & **Klauer**, K. C. (**2007**). HMMTree: A computer program for latent-class hierarchical multinomial processing tree models. *Behavior Research Methods*, *39*, 267-273.
    - **Singmann** & Kellen (**2009**). MPTinR: Analysis of multinomial processing tree models in R. *Behavior Research Methods*, *45*, 560-575.