

# Aplicações da modelagem multinomial na pesquisa em cognição humana

Carlos Gomes - Out/2018  
carlos.fagomes@gmail.com

# Apresentação

- Formação acadêmica
  - Psicólogo (2011, PUCRS, BR)
  - M.A. e Ph.D. em Desenvolvimento Humano (2017, Cornell, US)
  - Postdoc (atual, UFJF, BR)
    - Grupo de pesquisa em cognição e linguagem (CogLin, Drs Claudia e Francis Justi)
- Linhas de pesquisa
  - Desenvolvimento cognitivo
    - Ontogênese dos processos de memória
    - Memória ao longo do envelhecimento saudável e patológico (e.g., CCL e DA)
  - Modelagem matemática de processos cognitivos
    - Dual recall model
    - Conjoint source recognition

# Visão geral

- Breve história da modelagem multinomial aplicada à pesquisa cognitiva
- Motivação p/ o uso desse formalismo
- Conceitualização de um modelo do tipo *multinomial processing tree* (MPT)
- Exemplos
- Conclusão

# História



Bernoulli

- Fundamentos na área de probabilidade e estatística:
  - Jacob Bernoulli: *Ars Conjectandi* (1713) (A Arte da Conjectura)
  - Idéia de um único experimento que possui apenas dois resultados discretos:  
**Bernoulli trial**
    - Jogo de moeda
  - Generalização para  $n$  repetições de um Bernoulli trial:  
**Distribuição binomial**
    - Múltiplos jogos de moeda
  - Generalização para  $n$  repetições de um experimento com  $k > 2$  resultados discretos:  
**Distribuição multinomial**
    - Qual a probabilidade de em três jogos de roleta, a bola cair nos números 4, 23 e 2?

# História

- Pioneirismo na área de psicologia:



Bower



Estes



Batchelder

- **1950-1960:** Workshops organizadas em Stanford por Robert R. Bush, Clyde H. Coombs, William Estes, R. Duncan Luce, e Patrick C. Suppes sobre modelagem matemática
- **1960:** Introdução do uso de cadeias de Markov (modelagem de respostas finitas e discretas) na área de memória e behaviorismo (Gordon Bower, William Estes e James Greeno)
- **1964:** Criação do periódico *Journal of Mathematical Psychology*
- **1970-1980:** Aparecimento ocasional de modelagem multinomial aplicada ao estudo da cognição (Chechile & Meyer, 1976; Greeno et al., 1978; Ross & Bower, 1981)
- **1988, 1990:** Primeiros artigos de introdução técnica e teórica da modelagem multinomial como ferramenta de mensuração de processos cognitivos (Riefer & Batchelder, 1988; Batchelder & Riefer, 1990)

# História



Klauer



Brainerd



Kellen

- Modelagem multinomial atualmente:
  - Erdfelder et al. (2009): Revisão de 70 modelos multinomiais em mais de 20 áreas de pesquisa psicológica
  - Ferramenta analítica em contínuo aprimoramento:
    - Medidas de complexidade p/ seleção de modelos multinomiais (Wu, Myung, & Batchelder, 2010)
    - Generalização para análise hierárquica/multinível (Klauer, 2010; Smith & Batchelder, 2010)
    - Análise via métodos Bayesianos (Matzke, Dolan, Batchelder & Wagenmakers, 2015)
    - Acomodar tempo de reação para medir o tempo de processos latentes (Heck & Erdelder, 2016)

# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- Modelagem multinomial é um meio-termo entre métodos de análise de dados tradicionais e complexos modelos cognitivos

ANOVA  
Teste-t  
Regressão  
Multinível  
(...)

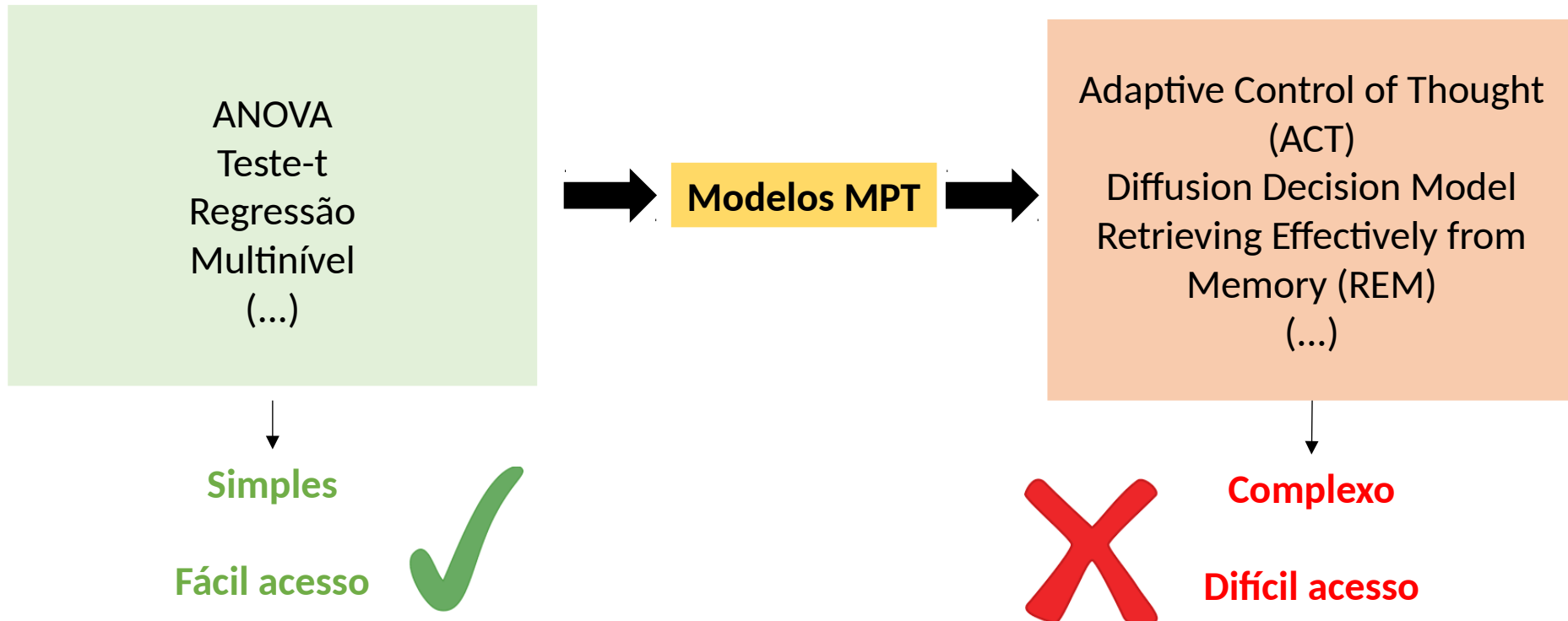


**Modelos MPT**

Adaptive Control of Thought  
(ACT)  
Diffusion Decision Model  
Retrieving Effectively from  
Memory (REM)  
(...)

# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- Modelagem multinomial é um meio-termo entre métodos de análise de dados tradicionais e complexos modelos cognitivos





# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- Modelagem multinomial é um meio-termo entre métodos de análise de dados tradicionais e complexos modelos cognitivos

ANOVA  
Teste-t  
Regressão  
Multinível  
(...)



Modelos MPT

Adaptive Control of Thought (ACT)  
Diffusion Decision Model  
Retrieving Effectively from Memory (REM)  
(...)

Descrevem apenas diferenças em variáveis observáveis



Desconectados de teoria cognitiva

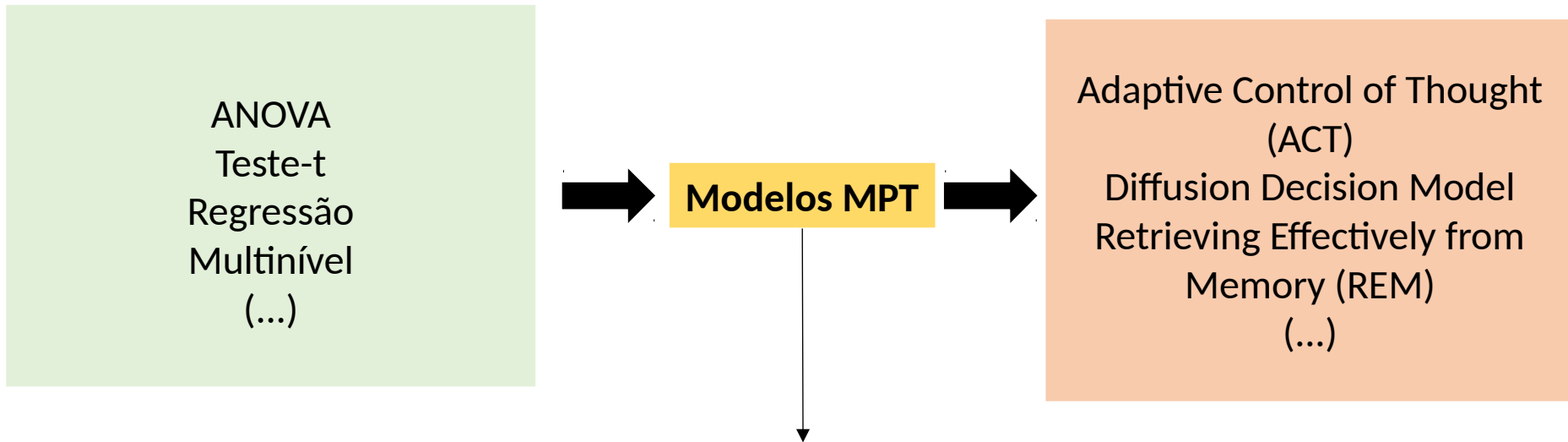


Descrevem diferenças em variáveis latentes

Forte influência de teoria cognitiva

# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- Modelagem multinomial é um meio-termo entre métodos de análise de dados tradicionais e complexos modelos cognitivos



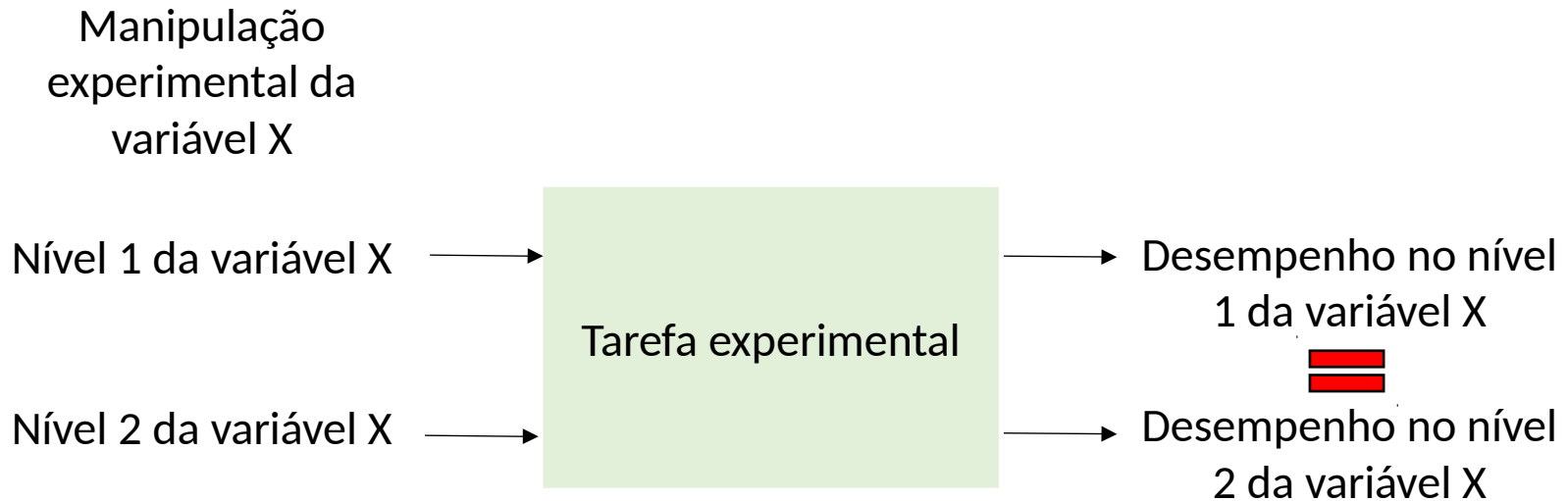
Implementam conceitos de uma teoria cognitiva no processo de análise de dados

Medem variáveis latentes (não observáveis) que explicam diferenças em variáveis observáveis (e.g., desempenho, tempo de reação, aprendizado)

São relativamente simples e existem diversos programas que permitem fácil uso

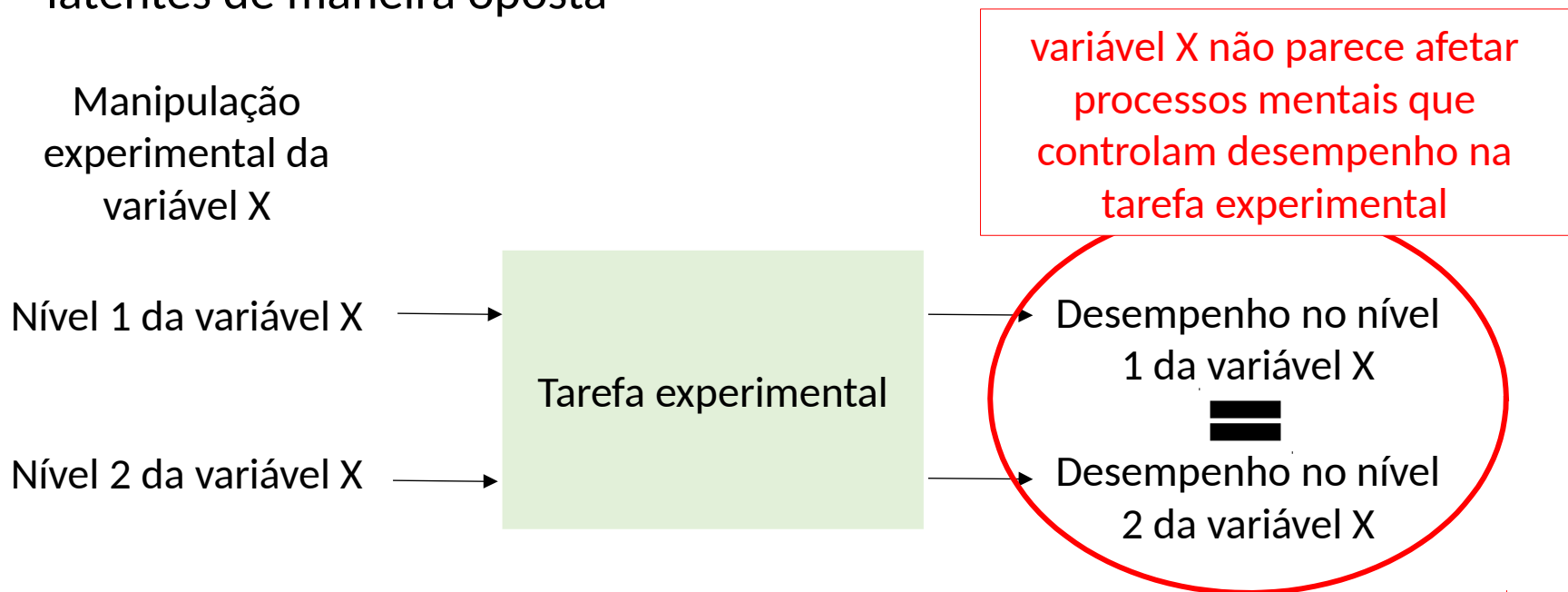
# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- **Métodos de análise tradicionais podem levar a conclusões incorretas** quando uma variável observável (e.g., RT, % recordação, nível de aceitação, % de escolha) é influenciada por processos latentes de maneira oposta



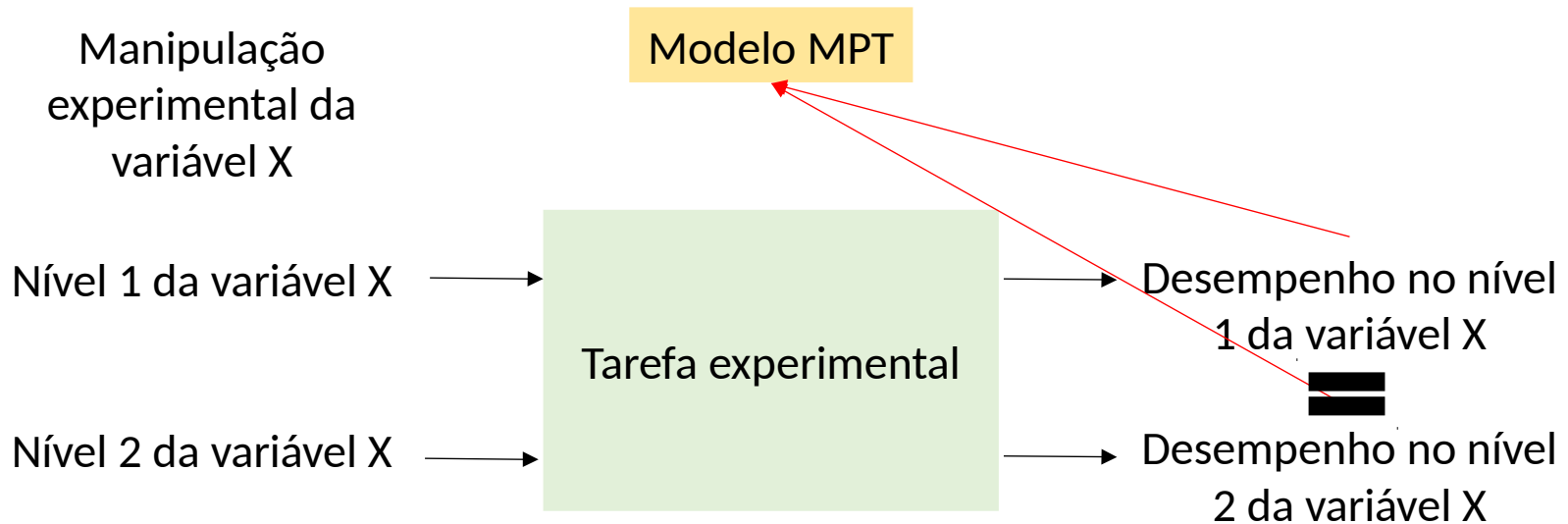
# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- **Métodos de análise tradicionais podem levar a conclusões incorretas** quando uma variável observável (e.g., RT, % recordação, nível de aceitação, % de escolha) é influenciada por processos latentes de maneira oposta



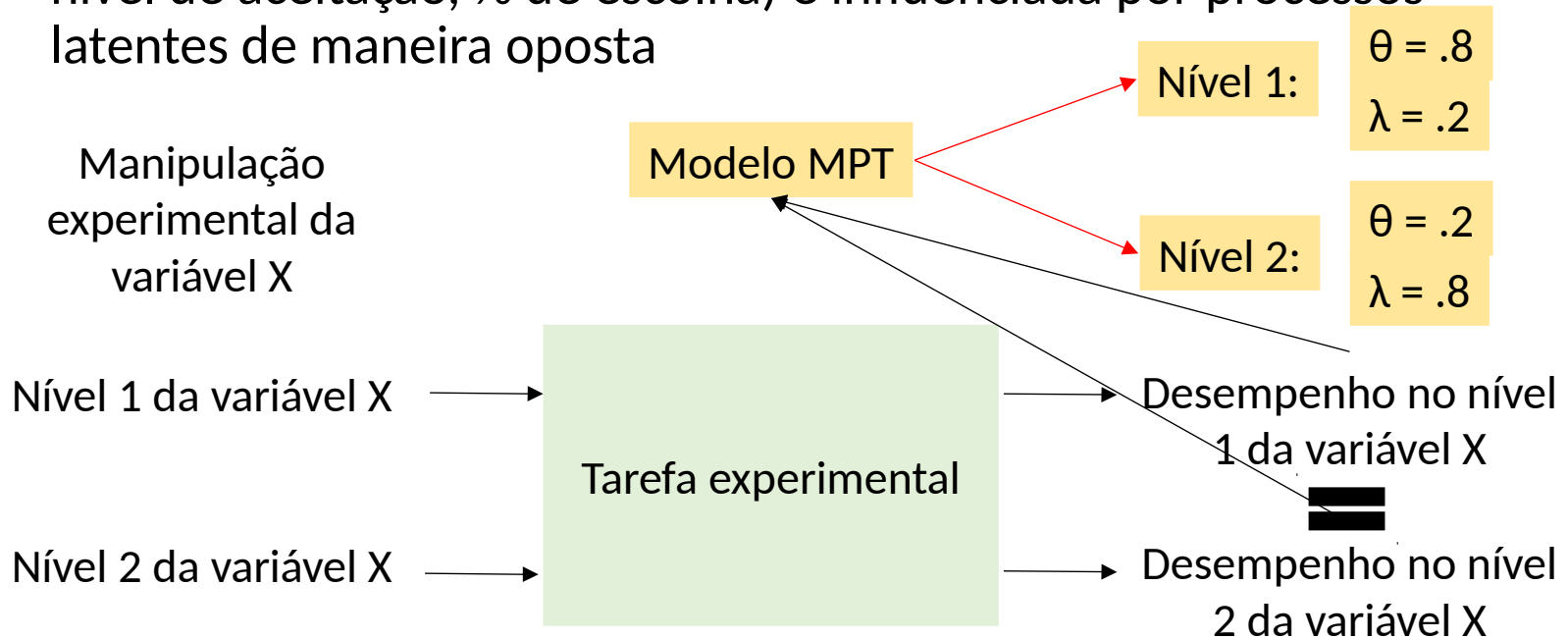
# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- **Métodos de análise tradicionais podem levar a conclusões incorretas** quando uma variável observável (e.g., RT, % recordação, nível de aceitação, % de escolha) é influenciada por processos latentes de maneira oposta



# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

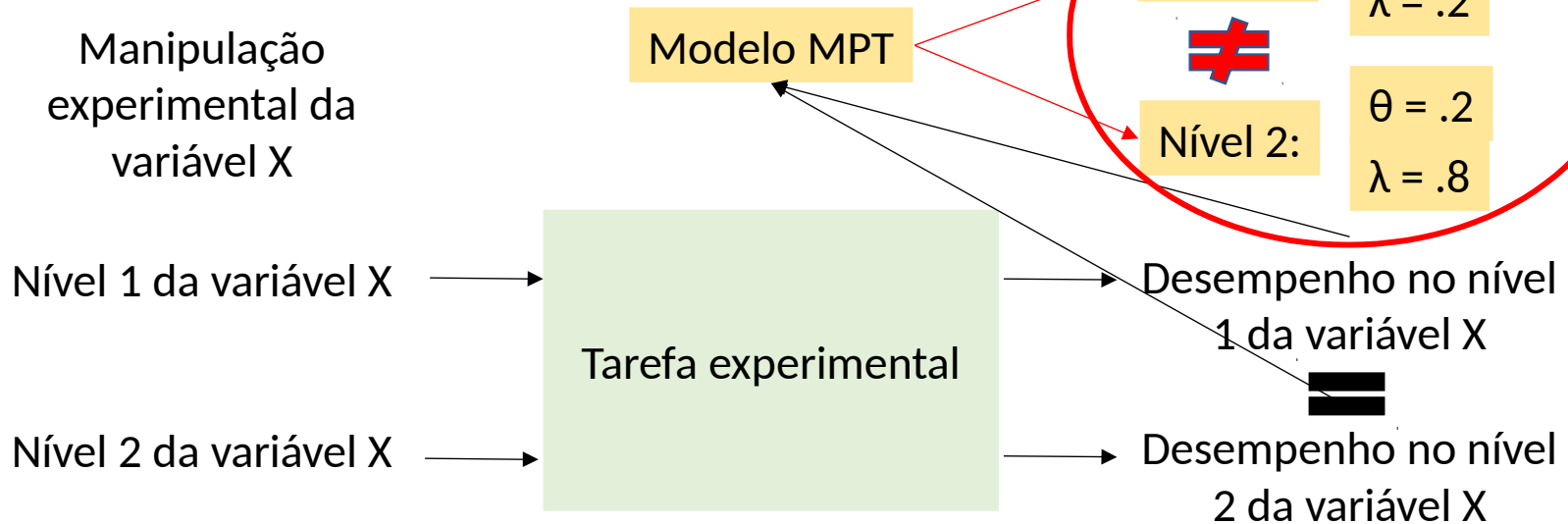
- **Métodos de análise tradicionais podem levar a conclusões incorretas** quando uma variável observável (e.g., RT, % recordação, nível de aceitação, % de escolha) é influenciada por processos latentes de maneira oposta



# Motivação p/ uso de modelagem multinomial

- **Métodos de análise tradicionais podem levar incorretas** quando uma variável observável (nível de aceitação, % de escolha) é influenciada por processos latentes de maneira oposta

variável X não produz diferenças no desempenho porque afeta processos mentais de forma oposta!



# O que é um modelo MPT?

- É uma técnica analítica utilizada para se medir processos latentes nas seguintes condições:
  - Os dados observáveis são representados de forma **categorial**
    - {Correto, Errado}
    - {Velho, Novo, Não sei}
    - {Amarelo, Vermelho, Roxo, Laranja}
    - Letras do alfabeto: {A, B, C, ..., Z}
    - Padrões de recordação ao longo de 3 testes: {111, 110, ..., 000}
  - Existe um **número finito** de categorias **distintas**
    - Binomial  Multinomial quando existem mais de 2 categorias
    - Pergunta:
      - Combinações de letras de qlqr tamanho: ASUHFA, ASIUDHASM, GNS, S, FNSLA, ... ?
      - Padrão de recordação ao longo de múltiplos testes: 111111..., 000000...?
    - Pergunta:
      - Qual o problema com {maçã verde, maçã madura, maçã estragada}?



# O que é um modelo MPT?

- É uma técnica analítica utilizada para se medir processos latentes nas seguintes condições:
  - Observações são **mutuamente independentes** e distribuídas de forma idêntica (*i.i.d.*)
    - Exemplo de múltiplas observações nos seguintes cenários:

Jogar moeda  
{cara, coroa}



Independente?

Revelar cartas de um monte  
{a copas, dois copas, ..., rei espadas}



Independente?

Colher maçãs  
{maçã verde, maçã madura}



Independente?

# O que é um modelo MPT?

- Quando essas condições são satisfeitas, as probabilidades das categorias podem ser descritas pela distribuição multinomial

$$P(\mathbf{D}; p_1, \dots, p_J) = N! \prod_{j=1}^J p_j^{N_j} / N_j!$$

- $N_j$ : Frequência da categoria  $C_j$  (e.g.,  $C_1 = \{\text{correto}\}$ ,  $C_2 = \{\text{errado}\}$ )
  - $p_j$ : Probabilidade de que uma observação seja da categoria  $C_j$
  - $\mathbf{D} = (N_1, \dots, N_J)$ : Vetor das observações
- 
- $P(\text{Correto} = 23, \text{Errado} = 37) = 60! \times [(.5^{23})/23!] \times [(.5^{37})/37!] = .02$
  - $P(\text{Correto} = 30, \text{Errado} = 30) = 60! \times [(.5^{30})/30!] \times [(.5^{30})/30!] = .10$
  - $P(\text{Correto} = 40, \text{Errado} = 20) = 60! \times [(.5^{40})/40!] \times [(.5^{20})/20!] = .003$

# O que é um modelo MPT?

$$P(\mathbf{D}; p_1, \dots, p_J) = N! \prod_{j=1}^J p_j^{N_j} / N_j!,$$

- Em um modelo *multinomial processing tree* (MPT), nós **explicitamos parâmetros ( $\theta$ ) na definição de  $p_j$  que representam processos mentais** responsáveis por gerar a categoria  $C_j$  como resposta

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_S, \dots, \theta_S)$$

- Elementos de  $\theta$  são (geralmente) probabilidades (intervalo [0,1])
- Um modelo MPT possui  $S$  parâmetros independentes de processos latentes

# O que é um modelo MPT?

- Um modelo MPT expressa as probabilidades de cada categoria em termos de processos latentes

$$\mathbf{p}(\theta) = (p_1(\theta), \dots, p_J(\theta))$$

- Formando um sistema de equações do tipo

$$p_1(p, q, r) \leftrightarrow P(\mathbf{BC}) = pqr$$

$$p_2(p, q, r) \leftrightarrow P(\mathbf{B}\bar{\mathbf{C}}) = pq(1 - r)$$

$$P(\bar{\mathbf{B}}\mathbf{C}) = p(1 - q)r$$

$$P(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}) = (1 - p) + p(1 - q)(1 - r).$$

**c**

**$\theta$**

# O que é um modelo MPT?

- Um modelo MPT expressa as probabilidades de cada categoria em termos de processos latentes

$$\mathbf{p}(\theta) = (p_1(\theta), \dots, p_J(\theta))$$

- Formando um sistema de equações do tipo

$$p_1(p, q, r) \leftrightarrow P(\mathbf{BC}) = pqr$$

$$p_2(p, q, r) \leftrightarrow P(\mathbf{B}\bar{\mathbf{C}}) = pq(1 - r)$$

$$P(\bar{\mathbf{B}}\mathbf{C}) = p(1 - q)r$$

$$P(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{C}}) = (1 - p) + p(1 - q)(1 - r).$$

categorias

processos latentes

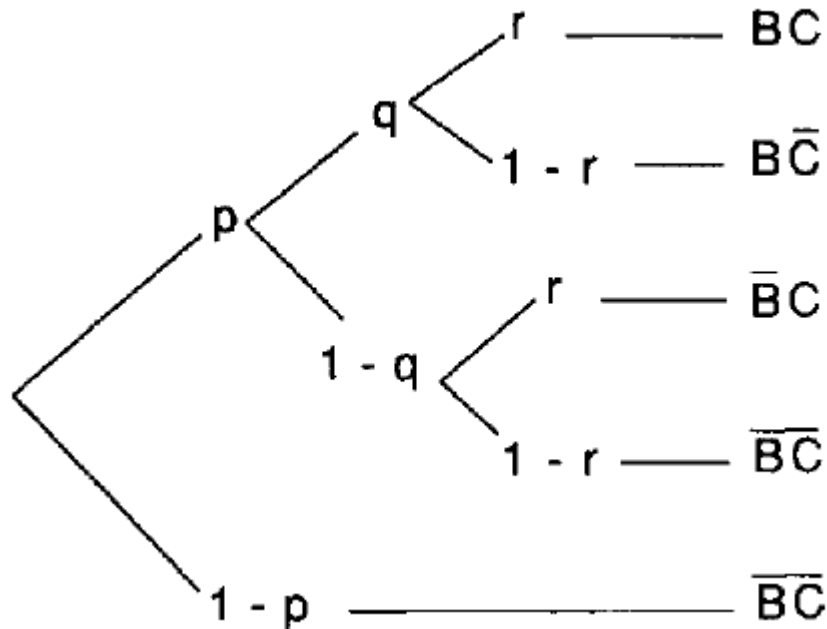
Gerar estas equações é o desafio principal na modelagem multinomial

É o que reflete uma teoria dos processos latentes

Auxílio de diagramas em forma de árvore

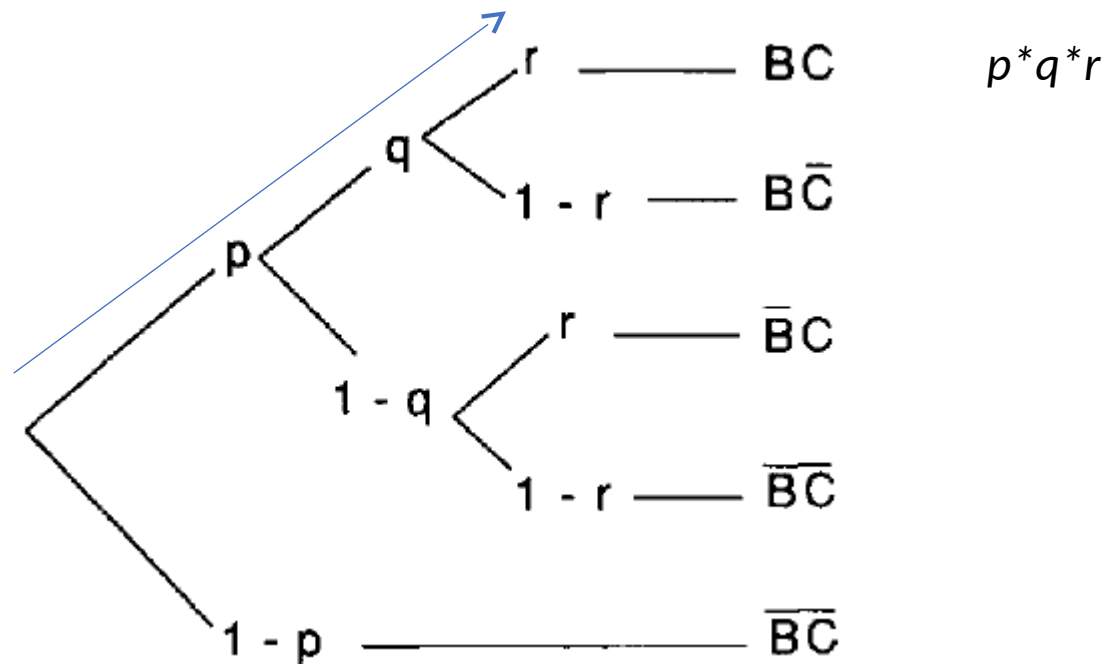
# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



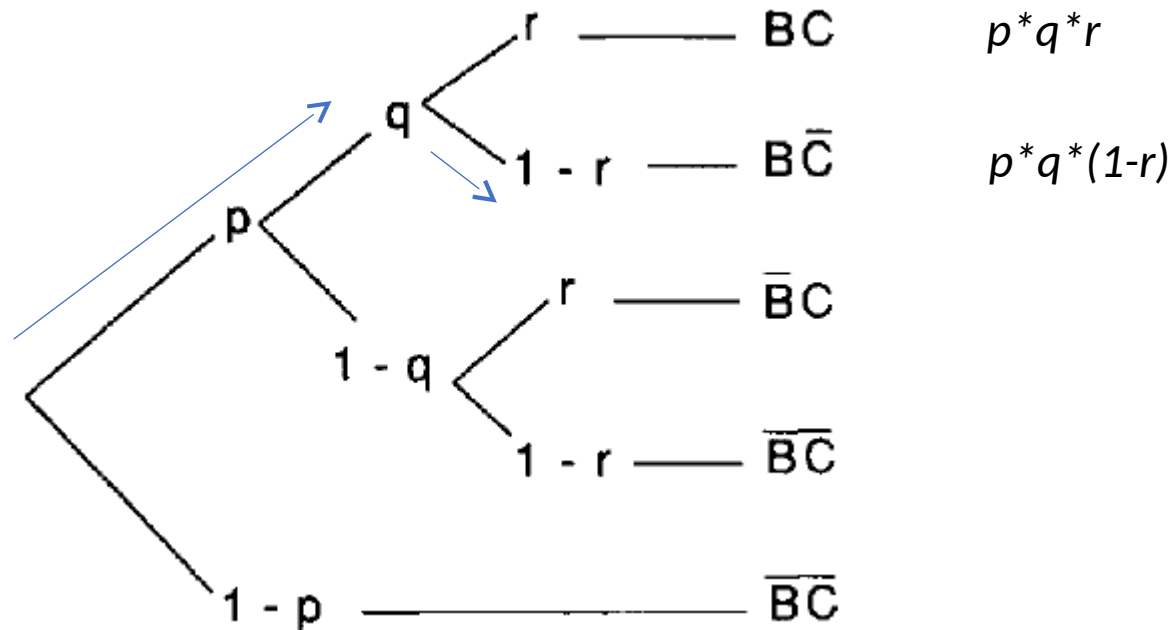
# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



# Diagramas em forma de árvore

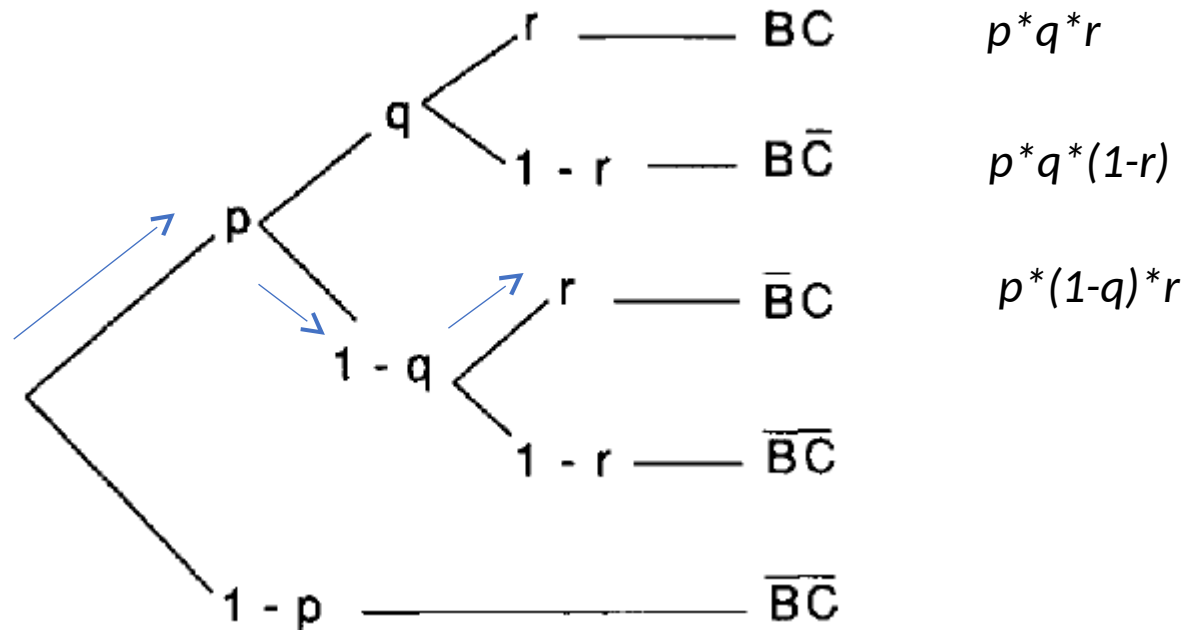
- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento





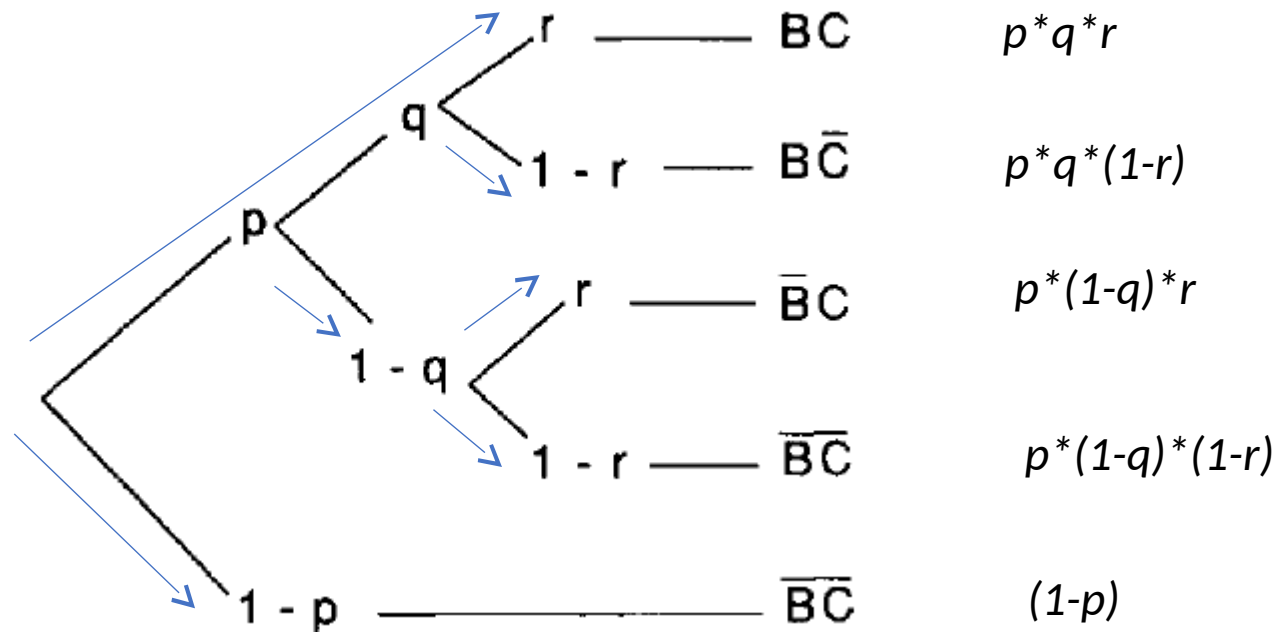
# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



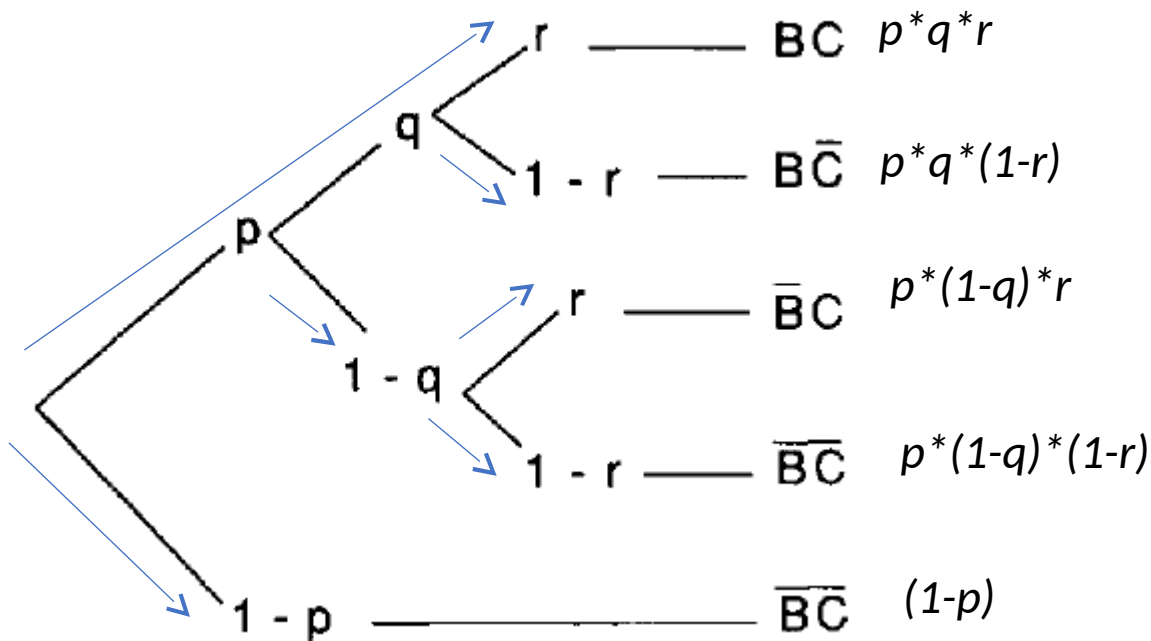
# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento

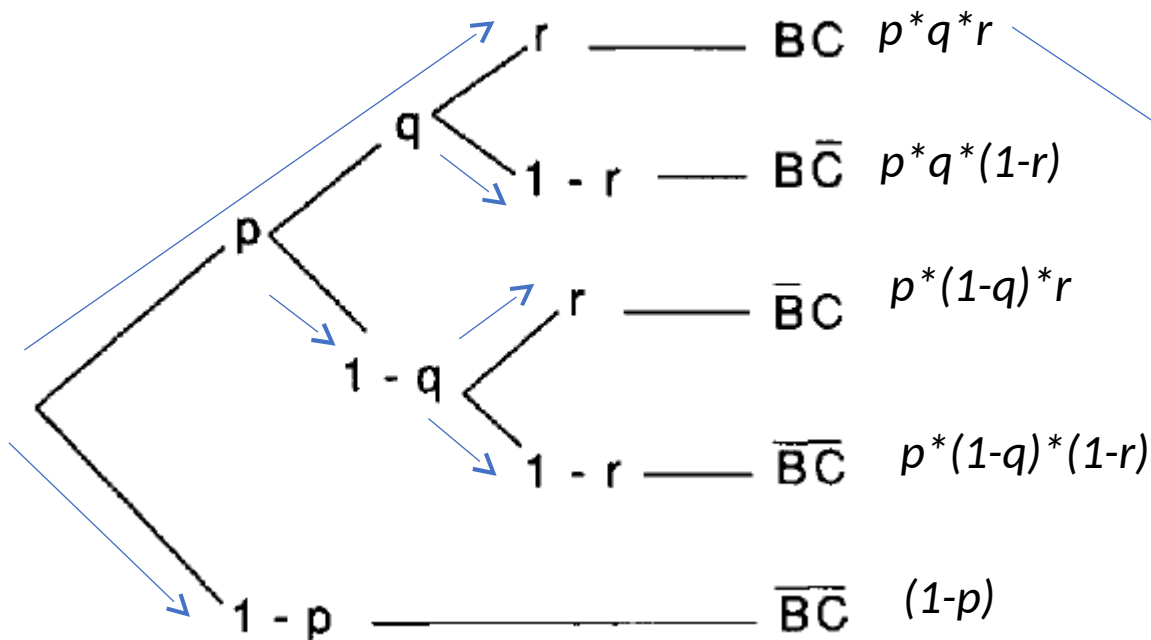


**Cada galho reflete um estado mental** que produz uma categoria como resposta (probabilidade da intersecção dos processos presentes no caminho do galho)

A **probabilidade de uma categoria ( $p_j$ )** é igual a **SOMA** do todos galhos que acabam com a mesma categoria

# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



A probabilidade de uma categoria é igual a SOMA de todos galhos que acabam com a mesma categoria

$$Pr(BC) = p^*q^*r$$

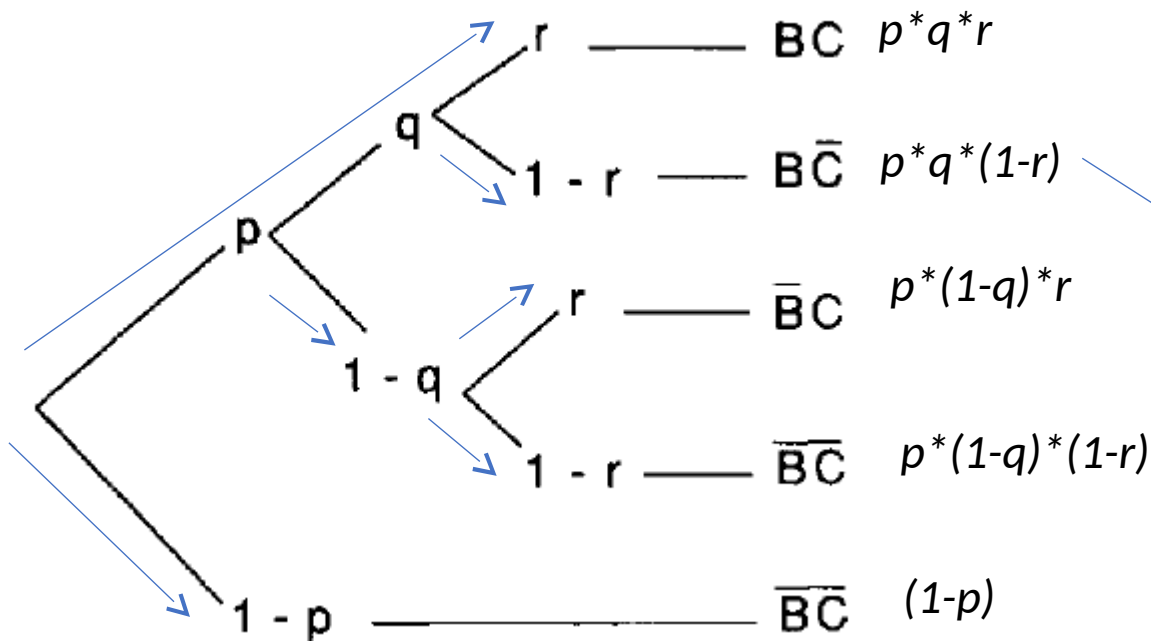
$$Pr(B\bar{C}) = p^*q^*(1-r)$$

$$Pr(\bar{B}C) = p^*(1-q)^*r$$

$$Pr(\bar{B}\bar{C}) = (1-p) + p^*(1-q)^*(1-r)$$

# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



A probabilidade de uma categoria é igual a SOMA de todos galhos que acabam com a mesma categoria

$$Pr(BC) = p^*q^*r$$

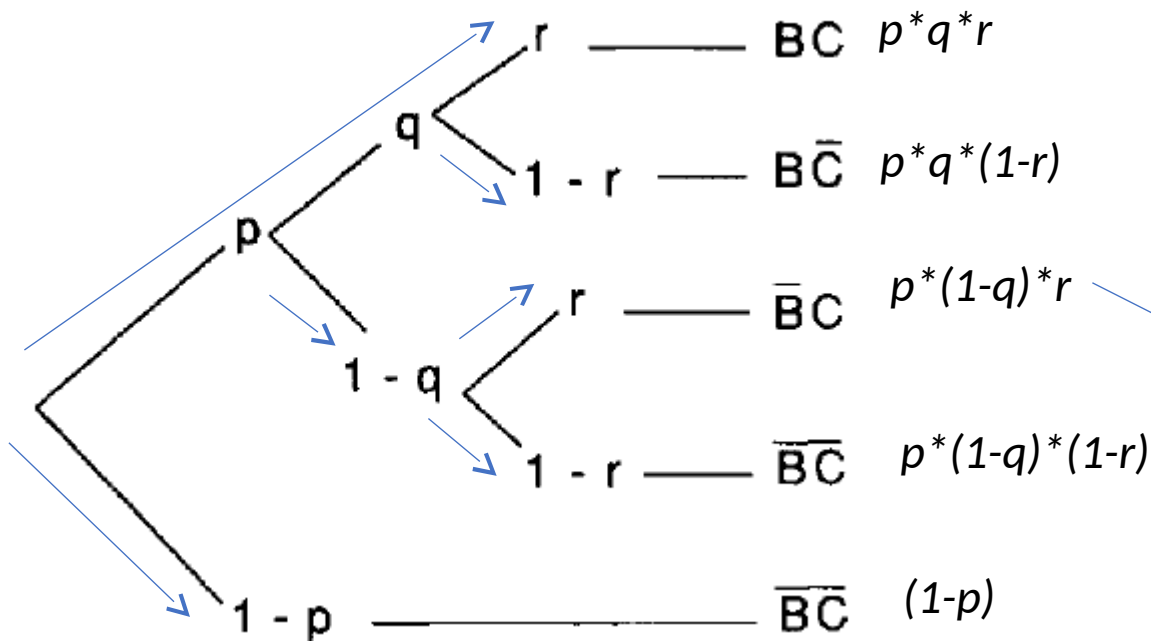
$$Pr(B\overline{C}) = p^*q^*(1-r)$$

$$Pr(\overline{B}C) = p^*(1-q)^*r$$

$$Pr(\overline{B}\overline{C}) = (1-p) + p^*(1-q)^*(1-r)$$

# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



A probabilidade de uma categoria é igual a SOMA de todos galhos que acabam com a mesma categoria

$$Pr(BC) = p^*q*r$$

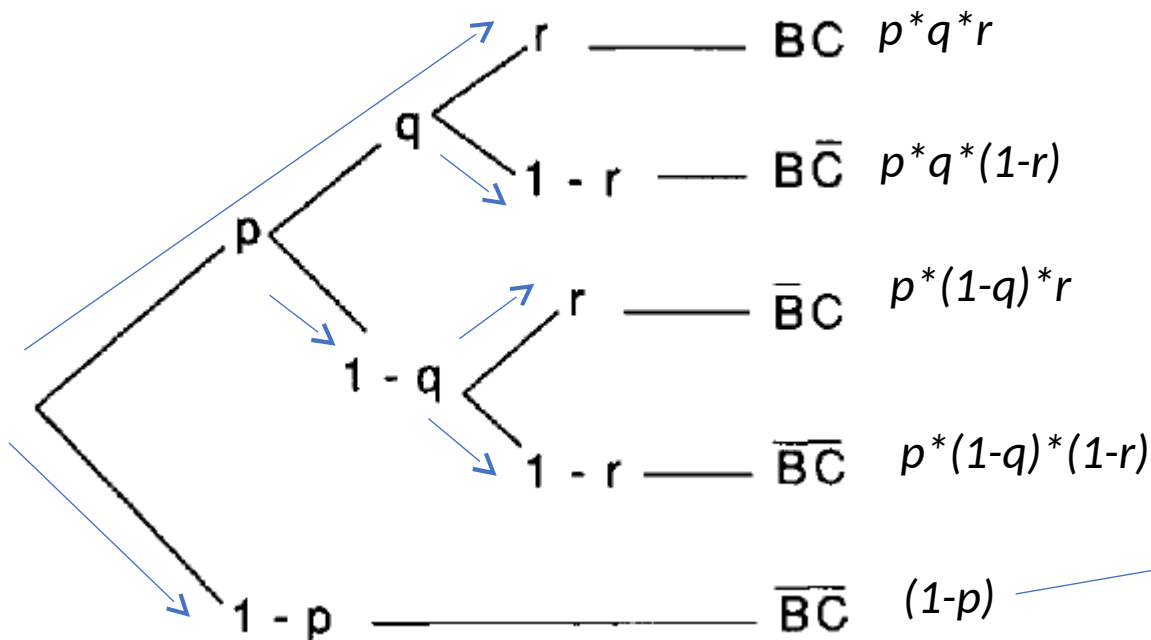
$$Pr(B\bar{C}) = p^*q*(1-r)$$

$$Pr(\bar{B}C) = p^*(1-q)*r$$

$$Pr(\bar{B}\bar{C}) = (1-p) + p^*(1-q)*(1-r)$$

# Diagramas em forma de árvore

- Ferramenta para desenvolvimento da relação entre processos latentes e categorias de resposta de um experimento



A probabilidade de uma categoria é igual a SOMA de todos galhos que acabam com a mesma categoria

$$Pr(BC) = p^*q*r$$

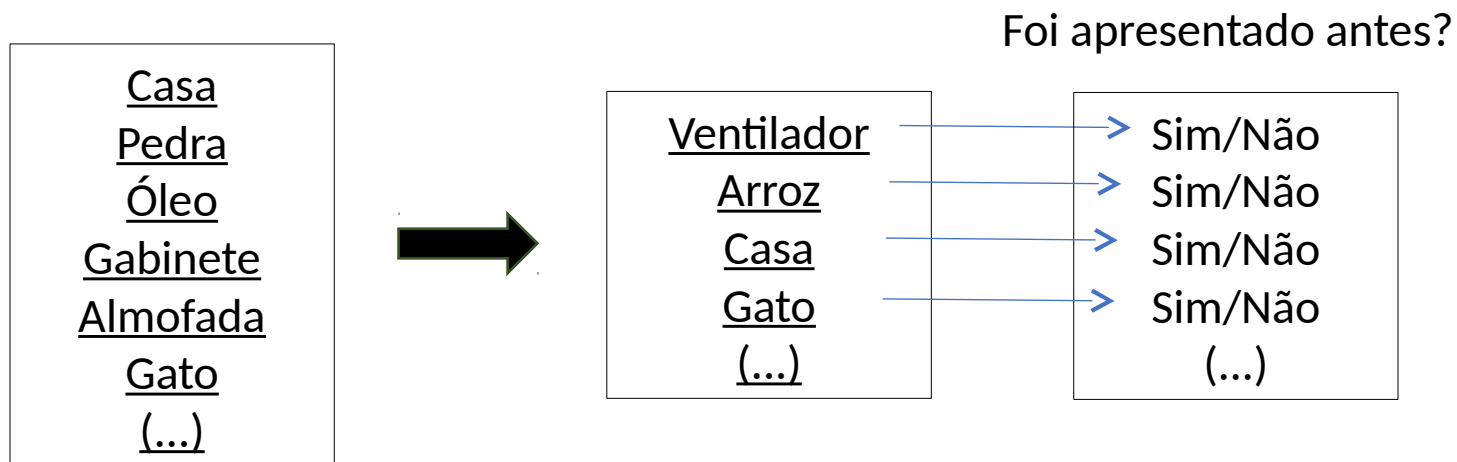
$$Pr(B\bar{C}) = p^*q*(1-r)$$

$$Pr(\bar{B}C) = p*(1-q)*r$$

$$Pr(\bar{B}\bar{C}) = (1-p) + p*(1-q)*(1-r)$$

# Exemplo: Reconhecimento de itens

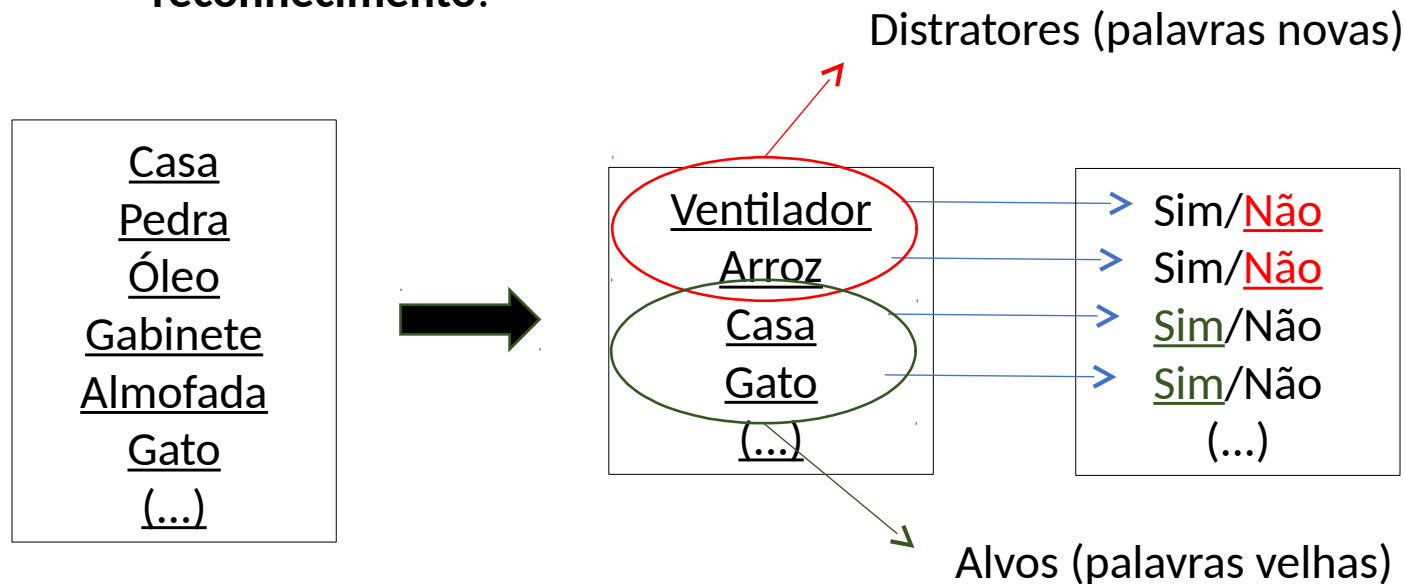
- Singmann & Kellen (2009). MPTinR: Analysis of multinomial processing tree models in R. *Behavior Research Methods*, 45, 560-575.
- Experimento de memória com duas fases:
  - **Estudo de uma lista de palavras familiares seguido por teste de reconhecimento:**





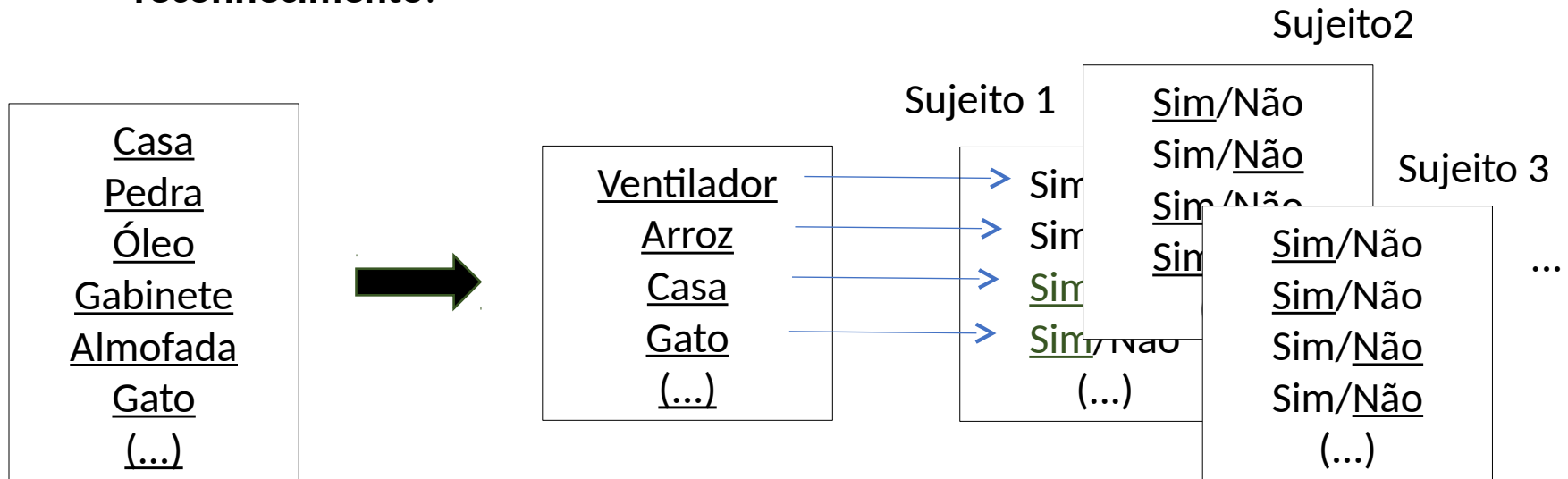
# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Singmann & Kellen (2009). MPTinR: Analysis of multinomial processing tree models in R. *Behavior Research Methods*, 45, 560-575.
- Experimento de memória com duas fases:
  - **Estudo de uma lista de palavras familiares seguido por teste de reconhecimento:**



# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Singmann & Kellen (2009). MPTinR: Analysis of multinomial processing tree models in R. *Behavior Research Methods*, 45, 560-575.
- Experimento de memória com duas fases:
  - **Estudo de uma lista de palavras familiares seguido por teste de reconhecimento:**



# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Singmann & Kellen (2009). MPTinR: Analysis of multinomial processing tree models in R. *Behavior Research Methods*, 45, 560-575.
- Experimento de memória com duas fases:
  - **Estudo de uma lista de palavras familiares seguido por teste de reconhecimento:**

Casa  
Pedra  
Óleo  
Gabinete  
Almofada  
Gato  
(...)

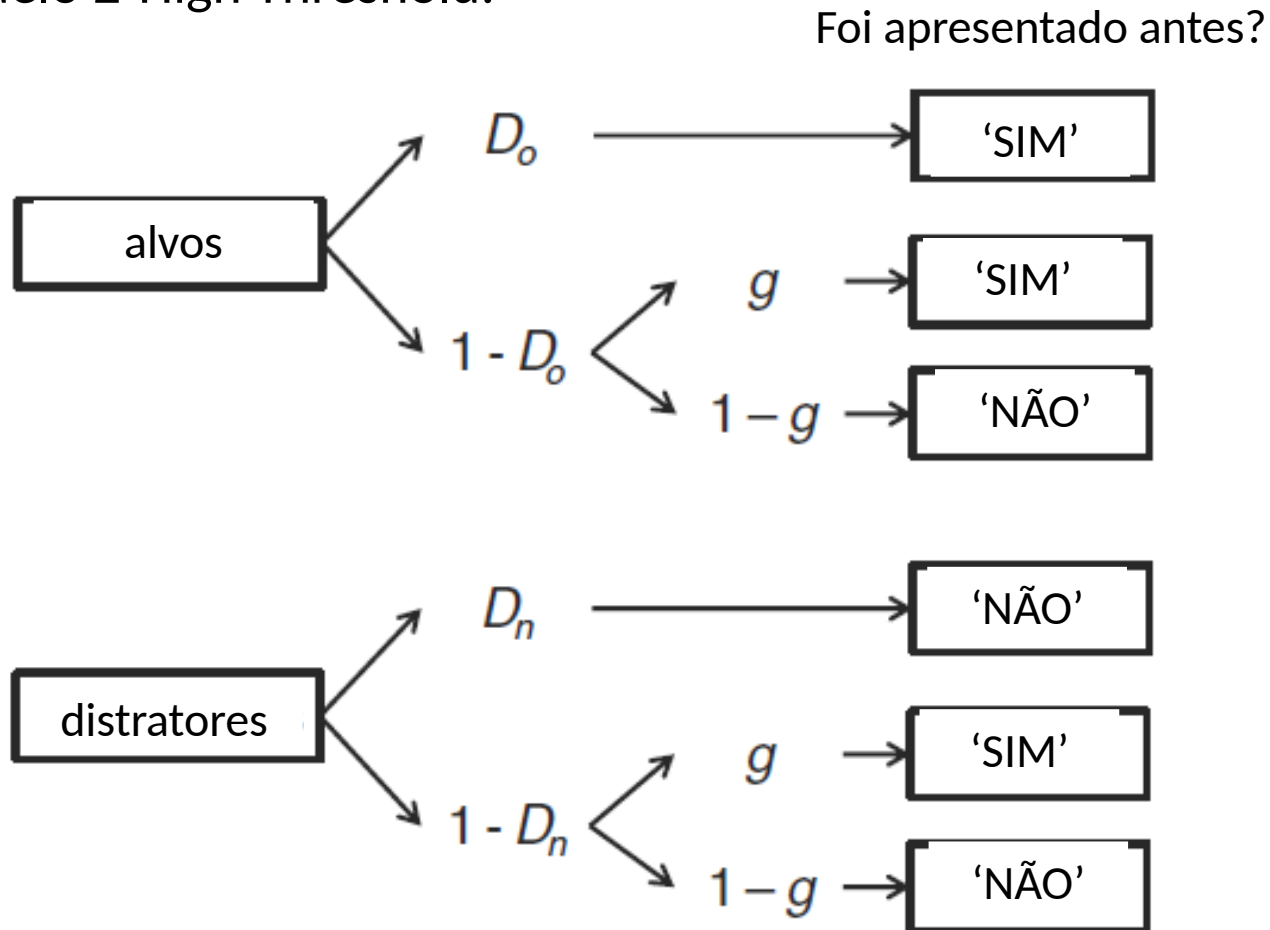


Ventilador  
Arroz  
Casa  
Gato  
(...)

|                    | <u>SIM</u> | <u>NÃO</u> |
|--------------------|------------|------------|
| <u>Alvos</u>       | 355        | 145        |
| <u>Distratores</u> | <u>25</u>  | <u>475</u> |

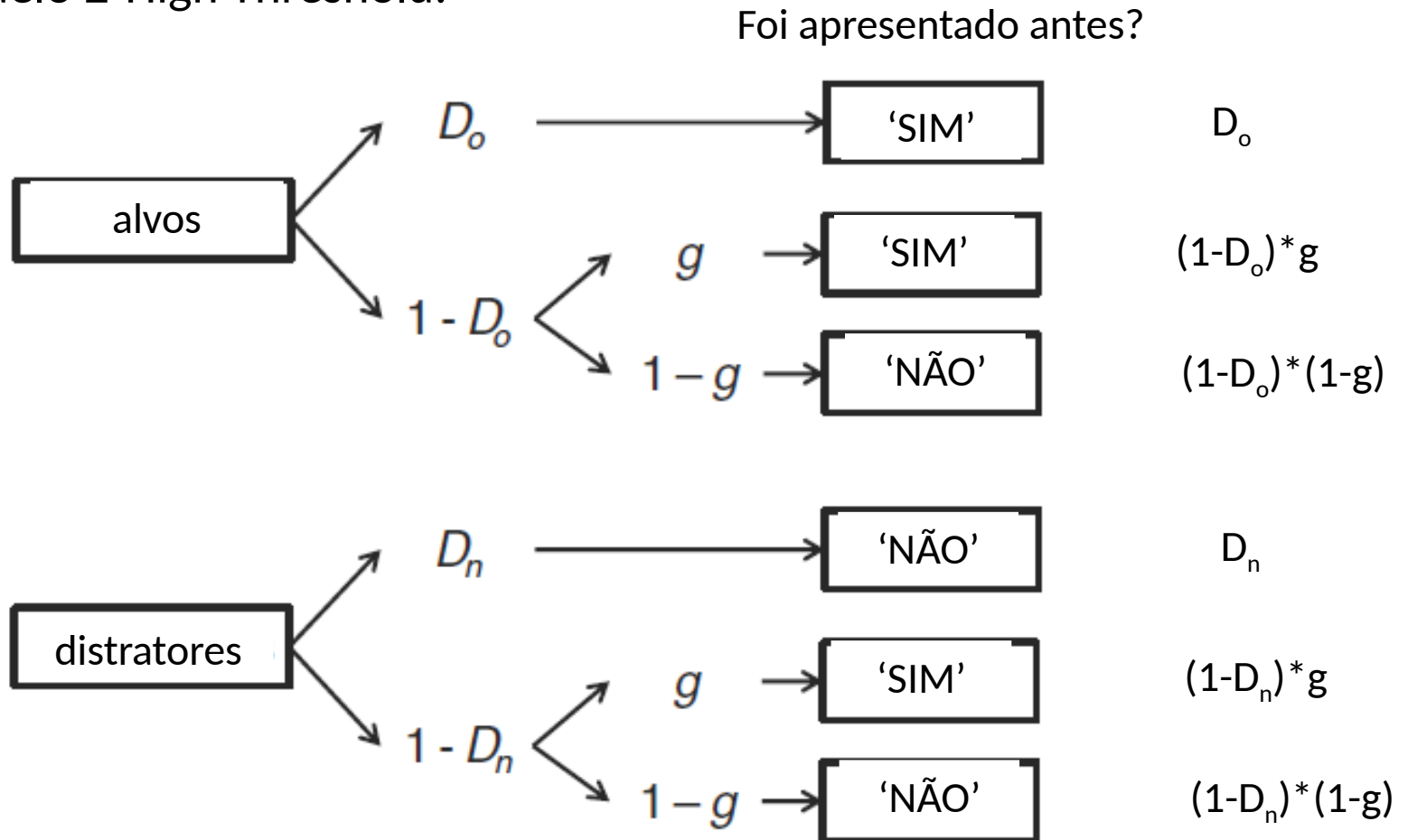
# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Modelo 2-High Threshold:



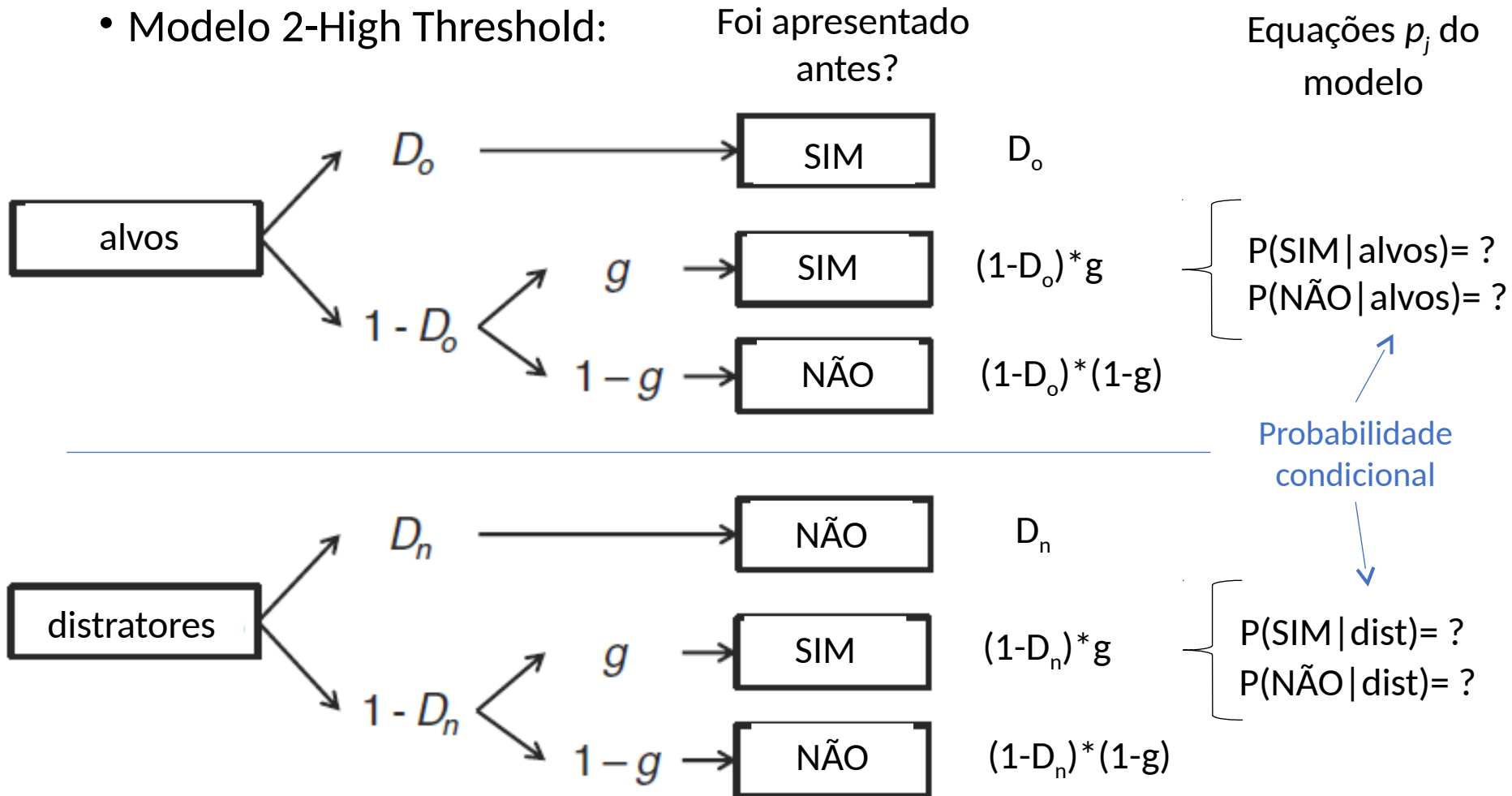
# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Modelo 2-High Threshold:



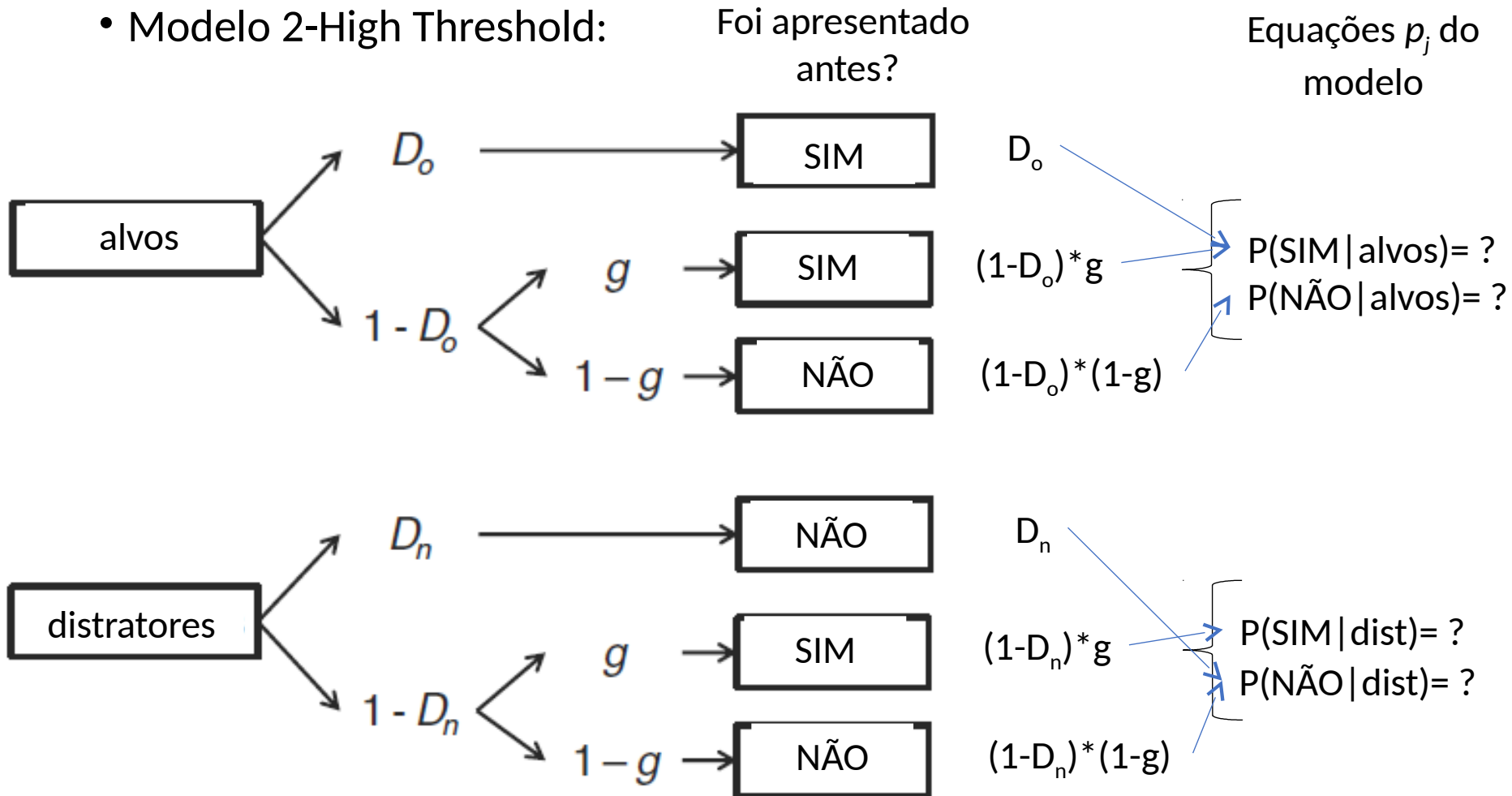
# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Modelo 2-High Threshold:



# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Modelo 2-High Threshold:



# Exemplo: Reconhecimento de itens

- Modelo 2-High Threshold:

$$P(\text{"sim"} \mid \text{alvos}) = D_o + (1 - D_o) \times g$$

$$P(\text{"n\~ao"} \mid \text{alvos}) = (1 - D_o) \times (1 - g)$$

$$P(\text{"sim"} \mid \text{distratores}) = (1 - D_n) \times g$$

$$P(\text{"n\~ao"} \mid \text{distratores}) = D_n + (1 - D_n) \times (1 - g)$$

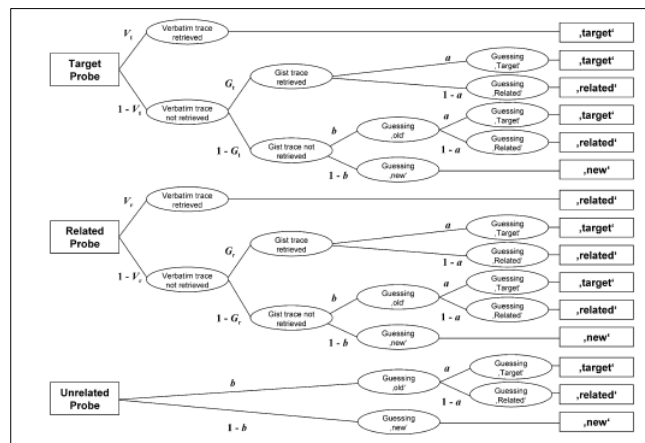
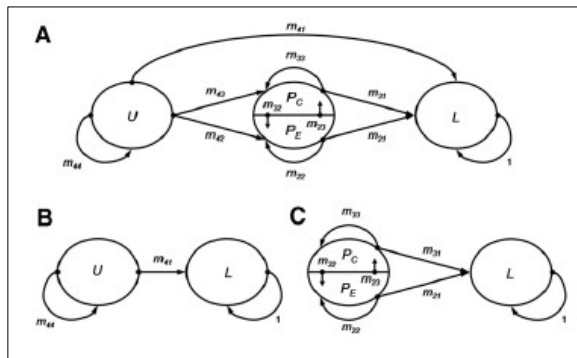
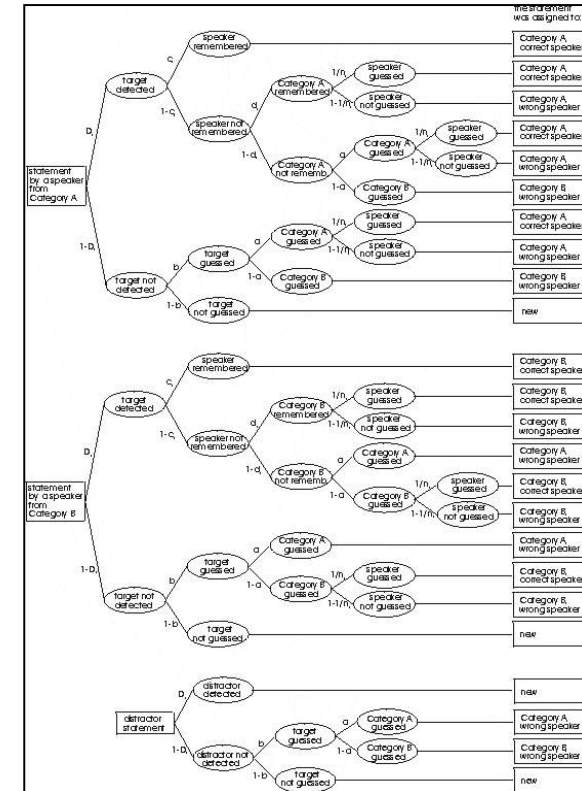
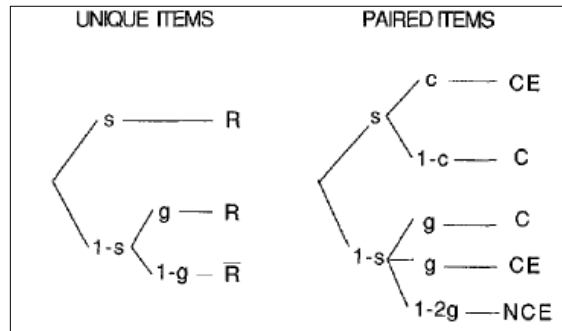
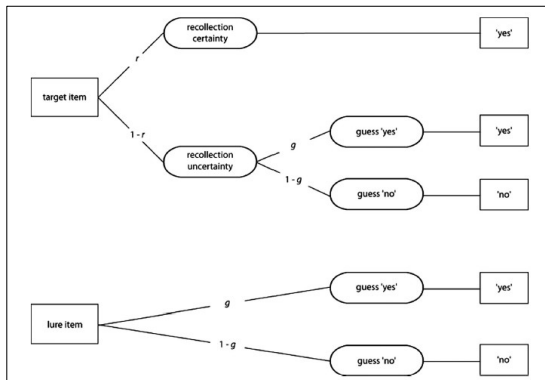
$$L(\mathbf{D}; p_1, \dots, p_J) = N! \prod_{j=1}^J \frac{[p_j(\theta)]^{N_j}}{N_j!}.$$

|                    | <u>SIM</u> | <u>N\~AO</u> |
|--------------------|------------|--------------|
| <u>Alvos</u>       | 355        | 145          |
| <u>Distratores</u> | 25         | 475          |



# Exemplos

- Existem centenas de modelos MPT nas mais diversas áreas da psicologia, com diferentes níveis de complexidade:



# Considerações finais

- Alguns formalismos levam tempo e dedicação para compreender, mas o empenho compensa!
- Não é mera coincidência que em áreas de investigação científica avançadas (e.g., física de partículas, biologia molecular), modelagem matemática é sinônimo de desenvolvimento teórico.
- Na minha experiência, cria um espaço extremamente recompensador para uso da criatividade e inovação ao incentivar a criação de novos paradigmas de investigação
- Não existe uma única forma de se fazer ciência, mas algumas se mostram mais produtivas do que outras (Platt, 1964)
  - Modelagem matemática força o pesquisador a utilizar método hipotético dedutivo (theory-driven research)

# Considerações finais

ANOVA  
Teste-t  
Regressão  
Multinível  
(...)



Modelos MPT



Adaptive Control of Thought  
(ACT)  
Diffusion Decision Model  
Retrieving Effectively from  
Memory (REM)  
(...)

**Provavelmente o que deveríamos estar fazendo com maior frequência**, mas difícil em uma área sem tradição de treinamento em exatas

# Considerações finais

ANOVA  
Teste-t  
Regressão  
Multinível  
(...)



Modelos MPT

Adaptive Control of Thought  
(ACT)  
Diffusion Decision Model  
Retrieving Effectively from  
Memory (REM)  
(...)

**Modelagem multinomial é um ótimo ponto de partida nessa direção, já que não requer treinamento extensivo e permite obter medidas simples de processos mentais**

# Considerações finais

- Existem diversos temas sobre modelos MPT que não foram discutidos aqui.

- Mini-curso de modelagem multinomial na UnB

- Para maiores informações:

- William (Bill) Batchelder (US)\* (1940-2018) (

<https://www.socsci.uci.edu/newsevents/news/2018/2018-08-20-batchelder.php>)

- Riefer, D. M., & Batchelder, W. H. (1988). Multinomial modeling and the measurement of cognitive processes. *Psychological Review*, 95, 318.
    - Batchelder, W. H., & Riefer, D. M. (1990). Multinomial processing models of source monitoring. *Psychological Review*, 97, 548.

- Karl Christoph Klauer (DE)

- Stahl, C., & Klauer, K. C. (2007). HMMTree: A computer program for latent-class hierarchical multinomial processing tree models. *Behavior Research Methods*, 39, 267-273.
    - Singmann & Kellen (2009). MPTinR: Analysis of multinomial processing tree models in R. *Behavior Research Methods*, 45, 560-575.

